SETSCI Conference Indexing System, Volume 3 (2018), 654-658

ISAS 2018-Winter

2nd International Symposium on Innovative Approaches in Scientific Studies

November 30 – December 2, 2018, Samsun, Turkey

GeoGebra ile Uygulama Oluşturma: Müller Yöntemi

İshak Cumhur[1*]

Matematik Bölümü/Fen-Edebiyat Fakültesi, Recep Tayyip Erdogan Universitesi, Rize

[*]Corresponding author: ishak.cumhur@erdogan.edu.tr

[+]Speaker: ishak.cumhur@erdogan.edu.tr

Presentation/Paper Type: Oral / Full Paper

Özet – Bilgisayar programlama dilleri bir veya daha çok değişkene sahip denklemlerin çözümünde oldukça kullanışlı yapılardır. Bu nedenle farklı algoritmalar oluşturulur ve denklemlerin yaklaşık çözümleri sayısal olarak elde edilir.

Denklemlerin çözümleri için yarılama, regula-falsi, Newton-Raphson, sekant ve sabit nokta iterasyonu gibi birçok yöntem vardır. Bu yöntemlerin uygulamaları daha önce GeoGebra'da oluşturulmuştur. Bunlara ek olarak, diğer yöntemlerle beraber verilen Müller yöntemi de ele alınabilir. Bu çalışmada GeoGebra yazılımı ile oluşturulan Müller yönteminin bir uygulaması verilecektir. Bu uygulama ile yaklaşık sayısal çözümlerin yanında çözümlerin grafikleri ve sayısal yöntemlerden elde edilen farklı görsel seçenekler verilecektir.

Anahtar Kelimeler – GeoGebra, Sayısal denklem çözme, Etkileşimli öğrenme, Matematiksel aktiviteler, Müller Yöntemi

Creating Applet with GeoGebra: Muller's Method

Abstract – Computer program languages are highly useful tools in the study for solving equations with one or more unknows. Therefore, various algorithms are constructed and the approximate solutions of these equations are obtained numerically.

There are many methods about solving equations as bisection, regula-falsi, Newton-Raphson, secant and fixed point methods. We previously accomplished the applets on these studies in GeoGebra. Moreover, we can handle Muller's method which is one of the several possible methods. In this study, we present an applet on Muller's method which is created GeoGebra Software. The applet provides approximate numerical solution, as well as displays the graphs of the solutions and different visual choices that are obtained from the numerical methods.

Keywords – GeoGebra, Numerical equation solving, Interactive learning, Mathematics activities, Muller's Method

I. GİRİŞ

Matematik öğretiminde görselleştirmelerden yararlanarak eğitim amaçlı birçok uygulamalar oluşturulmuştur. Bu tip uygulamalarla geometrik şekillerden daha çok yararlanılmış ve oluşturulan görsellerle birçok cebirsel ve analitik problemlerin çözümlerini incelemek daha pratik ve eğlenceli olmuştur.

Görsel matematik uygulamaları oluşturmak için kullanılan en önemli yazılımlardan biri de GeoGebra'dır. GeoGebra 2001 senesinde Markus Hohenwarter tarafından oluşturulmuştur ve günümüze kadar daha da geliştirilerek çok geniş bir uygulama sahası elde etmiştir.

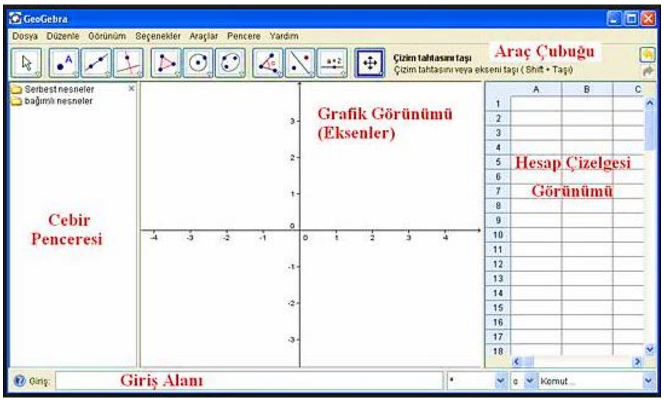
Matematik öğretiminde birçok konunun öğretilmesinde, teorik olarak verilen bir konunun görsel olarak desteklenmesi çok önemlidir. Bu görselleştirmeler, öğrencilerin bu dersteki kavramları daha kısa sürede anlamalarını sağlar. Bu durumda GeoGebra, matematik öğretme ve öğrenme faaliyetlerinde etkin bir şekilde kullanılır. Matematikle alakalı birçok konuda kullanıcı etkileşimli uygulamalar geliştirmek için GeoGebra'dan yararlanılmıştır.

GeoGebra'nın bir çok uygulamaları önceki çalışmalarda geliştirilmiştir. Sayısal iteratif yöntemlerin ele alındığı çalışmada lineer olmayan denklemler için eğitici düzeyde arayüzler tasarlanmıştır [1-2]. Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde kullanılan Euler ve Runge-Kutta yöntemleri için bir uygulama geliştirilmiştir [3]. GeoGebra'nın matematik öğretimindeki önemi vurgulanmıştır [4]. Türev uygulamaları konusunun öğretiminde dinamik bir yazılım olan GeoGebra tercih edilmiştir [5]. Limit ve sürekliliğinin öğretiminde GeoGebra'nın etkileri incelenmiştir [6].

II. MATERYAL VE YÖNTEM

A. *GeoGebra Arayüzü ve Kullanımı*

GeoGebra, cebir ve geometri kısımları için ayrı ayrı penceleler içerir. Herbir penceresinde kendine özgü uygulanması gereken stilleri ve komutları vardır. Bu bölümler cebir, geometri, hesaplama, CAS, tasarım gibi sıralanabilir. Bu pencerelerin herhangi birinde bir obje girildiğinde diğer bir pencerede uygun bir şekilde gözükeceği için pencerelerin hepsi birbirine bağlı olarak tasarlanmıştır. Ayrıca dışarıdan özel komutların girilebildiği GeoGebra'ya özgü tanımlanmış komutlarda kullanılabilir. GeoGebra'nın Şekil 1'deki gibi arayüzü vardır.

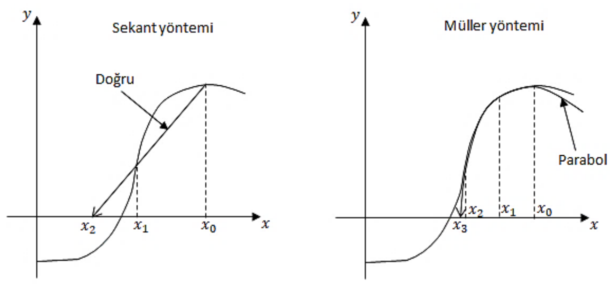


Şekil 1. GeoGebra arayüzü

Grafik penceresinde görüntüsü istenen nesnenin çizimi yapılır. Yapılan çizimler daha sonra hareket ettirilebilir. Burada GeoGebra'nın dinamik yapısı ortaya çıkmaktadır. Dinamik çizimler için araç çubuğundan faydalanılır. Buradan çizim yapılacak nesne seçilir ve grafik penceresinde çizim yapılır. Cebir penceresinde nesnelerin tüm özellikleri görüntülenip değiştirilebilir. Komut giriş alanında klavyeden doğrudan komutlar girilebilir. GeoGebra'ya özgü komutlar kullanıcılara ayrı bir kolaylık sağlamaktadır. Hesap çizelgesi bölümünde Excel'de olduğu gibi veriler ile çalışılabilir ve istatiksel kavramlar araştırılabilir. Bu alanda girilen veriler grafik ekranına da aktarılabilir.

B. Müller Yöntemi

Müller yöntemi, sekant yönteminin genelleştirilmiş bir şekli olarak bilinmektedir. Sekant yönteminde keyfi verilen iki noktadan geçen doğrunun x −ekseinini kestiği nokta güncel değer olarak alınıyorken, müller yönteminde ise keyfi üç noktadan geçen parabolün x −eksenini kestiği nokta güncel değer olarak hesaplanmaktadır. Şekil 2'de bu durum gösterilmektedir.



Şekil 2. Sekant ve Müller Yöntemleri yaklaşımları

Müller yöntemi, verilen üç noktadan geçen parabolün katsayılarının türetilmesinden oluşur. Denklem 1'de elde edilen kuadratik formun x −eksenini kestiği nokta kök yaklaşımı olarak hesaplanmaktadır.

$$f_2(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c \qquad (1)$$

$(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ ve $(x_2, f(x_2))$ noktalarından geçen parabola bulmak istiyoruz.

Bu noktalar Denklem 1'de yazılırsa,

$$f(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c \qquad (2)$$
$$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c \qquad (3)$$
$$f(x_2) = a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c \qquad (4)$$

sistemi elde edilir. Sadelik için $f(x)$ fonksiyonu tercih edilmektedir. Üç denklemden a, b ve c bilinmeyenleri çözülebilir. Denklem 4'den $c = f(x_2)$ olduğu açıktır. Denklem 2 ve Denklem 3'de c'nin bu değeri yazılırsa,

$$f(x_0) - f(x_2) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) \qquad (5)$$
$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) \qquad (6)$$

elde edilir. Cebirsel düzenlemelerle a ve b katsayıları bulunabilir. Bunun için farklı sayılar tanımlanmaktadır.

$$h_0 = x_1 - x_0\,,\ h_1 = x_2 - x_1$$
$$\delta_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},\ \delta_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (7)$$

sabitleri tanımlanırsa, Denlem 5 ve Denklem 6'da bunlar yazıldığında

$$(h_0 + h_1)b - (h_0 + h_1)^2 a = h_0\delta_0 + h_1\delta_1$$
$$h_1 b - h_1^2 a = h_1\delta_1$$

sisteminden a ve b çözülebilir. Buradan katsayılar,

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} \qquad (8)$$
$$b = a h_1 + \delta_1 \qquad (9)$$
$$c = f(x_2) \qquad (10)$$

olarak hesaplanmaktadır. Kökü bulmak için Denlem 1'in kuadratik şekli gözönüne alınırsa alternatif form olarak,

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}} \qquad (11)$$

elde edilir.

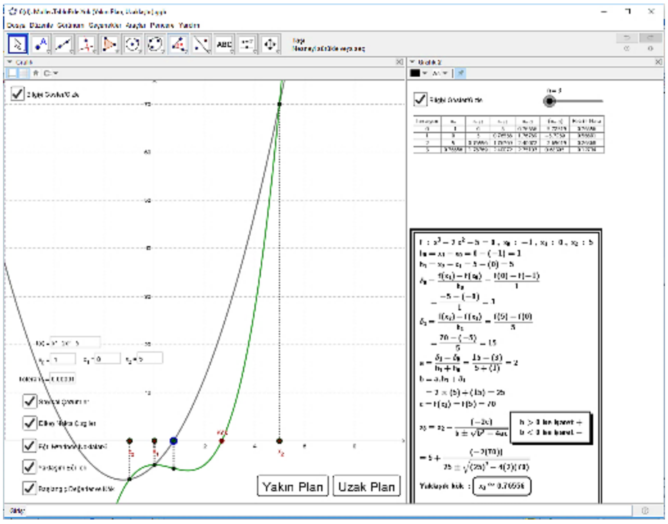
Yöntemin kararlığını sağlamak için Denklem 11'de mutlak değerce en küçük kök tercih edilmektedir. $b > 0$ ise pozitif işaret, $b < 0$ ise negative işaret kullanılmaktadır. Bu seçim en büyük paydayı oluşturur ve böylece köke yakın olan yeni bir tahmin vermektedir. x_3 bulunduğunda diğer iterasyonlara devam edilir. Bu durumda yeni başlangıç değerler olarak $\{x_0, x_1, x_2\}$ yerine $\{x_1, x_2, x_3\}$ güncel değerleriyle yeni bir x_4 değeri hesaplanır. Bu şekilde işlemlere devam ederek her seferinde hesaplanan yeni değerlerle köke yaklaşılmaya çalışılmaktadır.

Bu yöntemin diğer yöntemlerden farkı, Denklem 11 kuadratik ifade olduğu için reel köklerin yanında kompleks köklerin de bulunuyor olmasıdır.

III. SONUÇLAR

Basit denklemler haricinde çoğu lineer olmayan denklemin çözümlerinin el ile bulunması zahmetli ve çok zaman gerektiren bir durumdur. Ancak Matlab, Mathematica ve Maple gibi değişik türde yazılımlarla algoritmalar geliştirerek daha kısa zamanda istenen çözümler bulunabilmektedir. Bu çalışmada program bilgisine gerek duymadan denklem çözümlerinin Müller yöntemine göre elde edilebildiği kullanıcı etkileşimli ve dinamik bir uygulama geliştirilmiştir. Bu şekilde sayısal çözümlerin incelenmesinin yanısıra uygulamaya eklenen görseller yardımıyla kullanıcılara kolayca yöntemi irdeleme fırsatı verilmektedir. Uygulama sayısal çözümleri, mutlak hataları tablo halinde göstermenin yanında görsel olarak da bu değerleri birebir grafik ekranına yansıtmaktadır. Ayrıca gösterme seçenekleriyle uygulamada istenen şeyin ekranda olup olmayacağına karar verilebilmektedir.

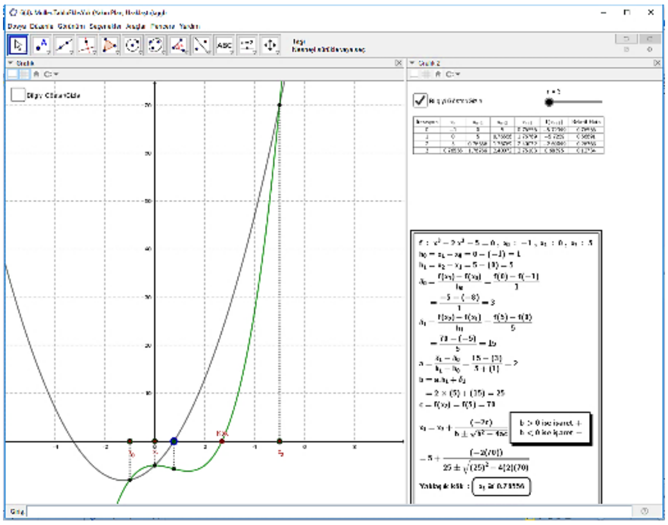
Müller yöntemi için GeoGebra'da tasarlanan uygulama Şekil 3'de olduğu gibidir. Bu uygulama, $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ denkleminin $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ ve $x_2 = 5$ başlangıç değerleri seçilerek köklerin Müller yöntemiyle elde edilişini göstermektedir.



Şekil 3. Müller yöntemi uygulama arayüzü

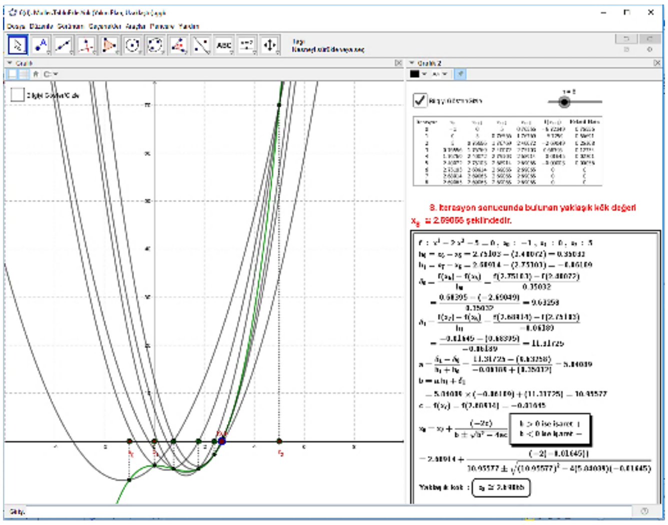
Bu yöntem için f fonksiyonunun, başlangıç değerlerin ve duyarlılığın girilmesi gerekmektedir. Değerler girildiğinde eşzamanlı olarak hesaplamalar başlar. Kullanıcı bu değerleri girdiğinde, girilen ifadelere bağlı olarak ekranda grafikle beraber tablo değerleri ve Müller yönteminde hesaplanması gereken sabitleri görebilmektedir. Müller yöntemi iteratif bir yöntem olduğundan diğer aşamaları görebilmek için kaydırma düğmesi hareket ettirilmelidir. Kaydırma düğmesi hareket ettirildiğinde herbir iterasyonda hesaplamalar güncelenecektir.

Uygulama arayüzünde işaret kutusunun onaylı olup olmaması durumlarına göre grafik üzerinde istenilen bilgiler gösterilebilir veya gizlenebilir. Buradaki amaç kullanıcının ekrandaki düzenlemeleri yöneterek daha sade ve anlaşılır bilgileri görmesidir. Şayet girilen parametreler ekranda istenmiyorsa grafikle bu değerler aynı ekranda karmaşaya neden olabileceği için sadece grafik görüntüsü için Bilgiyi Göster/Gizle düğmesinden yararlanılabilir. Bu durumda ekran görüntüsü Şekil 4'te olduğu gibi olmaktadır.



Şekil 4. Bilgiyi Göster/Gizle düğmesinin işlevi

Kaydırma düğmesi arttırıldığında herbir iterasyonda hesaplanan değerler tabloya satır olarak eklenmektedir. Müller yöntemi polinomlarla köke yakınsama sağladığından herbir adımda elde edilen polinomlar grafiğe etkileşimli bir şekilde eklenmektedir. Girilen tolerans değerine göre yakınsama olduğunda uyarı vererek kök hesaplanmaktadır. Hesaplanan bu değerler yine eş zamanlı olarak grafiğe aktarılmaktadır. O halde sonraki iterasyonlarda elde edilen sonuç ve grafik Şekil 5'de verilmiştir.



Şekil 5. Müller yönteminin yakınsama durumu

İterasyon değeri arttırıldığında tüm aşamalardaki hesaplamalar yapılır ve hesaplanan sayısal değerler tabloya eklenir. Ayrıca bu tabloda her adımda hesaplan hatalar da yer almaktadır. Kullanıcılar tüm iterasyon değerlerinde bu değerleri görebilmektedirler. Yakınsama olma durumunda ekranda tablo değerleri verilen örneğe göre Tablo 1'de olduğu gibi görülebilmektedir.

Tablo 1. Arayüze eklenen tablo değerleri

İterasyon	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	x_{n+3}	$f(x_{n+3})$	Relatif Hata
0	−1	0	5	0.76556	−5.72349	0.76556
1	0	5	0.76556	1.76769	−5.7259	0.56691
2	5	0.76556	1.76769	2.40072	−2.69049	0.26368
3	0.76556	1.76769	2.40072	2.75103	0.68395	0.12734
4	1.76769	2.40072	2.75103	2.68914	−0.01645	0.02301
5	2.40072	2.75103	2.68914	2.69065	−0.00003	0.00056
6	2.75103	2.68914	2.69065	2.69065	0	0
7	2.68914	2.69065	2.69065	2.69065	0	0
8	2.69065	2.69065	2.69065	2.69065	0	0

Müller yönteminde hesaplanan parametre değerleri her iterasyon değerinde güncellenmektedir. Son adımda hesaplanan değerler Şekil 6'da verilmektedir.

$$f\ :\ x^3-2x^2-5=0,\ x_0\ :\ -1,\ x_1\ :\ 0,\ x_2\ :\ 5$$

$$h_0=x_6-x_5=2.75103-(2.40072)=0.35032$$

$$h_1=x_7-x_6=2.68914-(2.75103)=-0.06189$$

$$\delta_0=\frac{f(x_6)-f(x_5)}{h_0}=\frac{f(2.75103)-f(2.40072)}{0.35032}$$

$$=\frac{0.68395-(-2.69049)}{0.35032}=9.63258$$

$$\delta_1=\frac{f(x_7)-f(x_6)}{h_1}=\frac{f(2.68914)-f(2.75103)}{-0.06189}$$

$$=\frac{-0.01645-(0.68395)}{-0.06189}=11.31725$$

$$a=\frac{\delta_1-\delta_0}{h_1+h_0}=\frac{11.31725-(9.63258)}{-0.06189+(0.35032)}=5.84089$$

$$b=a.h_1+\delta_1$$

$$=5.84089\times(-0.06189)+(11.31725)=10.95577$$

$$c=f(x_7)=f(2.68914)=-0.01645$$

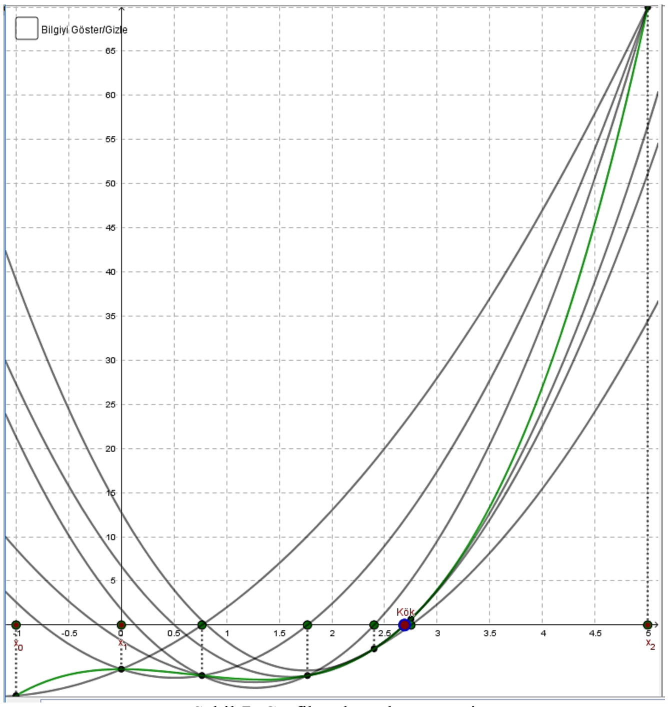
$$x_8=x_7+\frac{(-2c)}{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}\quad \boxed{\begin{array}{l} b>0 \text{ ise işaret } + \\ b<0 \text{ ise işaret } - \end{array}}$$

$$=2.68914+\frac{(-2(-0.01645))}{10.95577\pm\sqrt{(10.95577)^2-4(5.84089)(-0.01645)}}$$

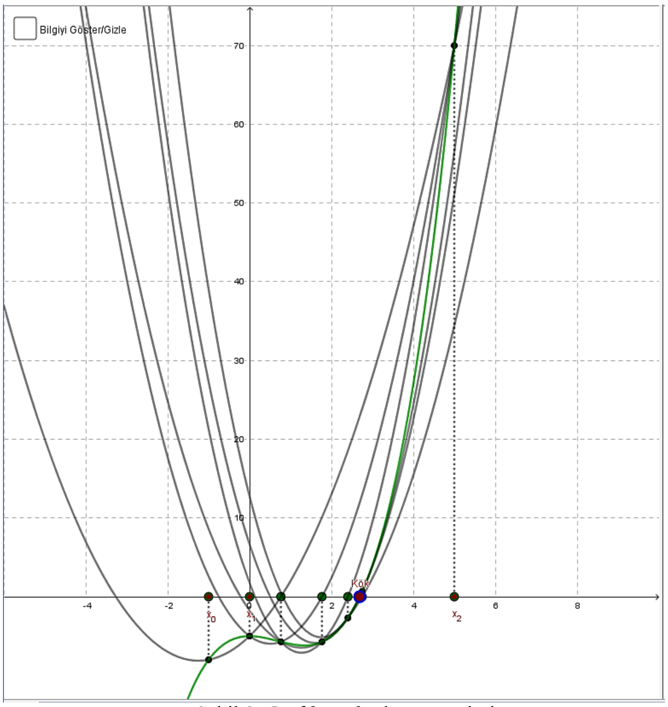
Yaklaşık kök : $\boxed{x_8\cong 2.69065}$

Şekil 6. Uygulamada hesaplanan sabitler bölümü

Uygulamaya eklenen Yakın Plan ve Uzak Plan düğmeleriyle grafikleri ve sayısal çözümleri sadece istenen kısımları daha geniş pencereden göstermek mümkün olmaktadır. Sırasıyla yakın ve uzak plan gösterimleri Şekil 7 ve Şekil 8'de verilmektedir.



Şekil 7. Grafik yakın plan gösterimi



Şekil 8. Grafik uzak plan gösterimi

IV. TARTIŞMA VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada denklem çözümlerinin müller yönteminin bir uygulaması olarak GeoGebra'da nasıl olabileceğini açıkladık. Bu uygulamayı kullanarak sayısal çözüm araştırmanın yanında çözümün geometrik açıdan görsel hale getirilmesi sağlanmıştır. Ayrıca farklı fonksiyonlar ve farklı parametreler seçerek GeoGebra'nın dinamik yapısını kullanarak daha farklı sonuçlarının test edilmesine imkan verilmiştir. Bu şekilde denemeler yapılarak aslında teorik olan dersin daha anlaşılır olması amaçlanmıştır.

Sayısal hesaplamalarda oluşturulan uygulamalar hem kullanışlıdır hem de eğitim ve öğretime katkı sağlamaktadır. Bu nedenle eğiticiler, daha gelişmiş uygulamalar oluşturabilirler ve geliştirdikleri bu uygulamalar alanda çok fayda sağlayabilirler.

REFERANSLAR

[1] Ana M. Martin-Carabolla, Angel F. Tenorio-Villalon, "Teaching Numerical Methods for Non-Linear Equations with GeoGebra-Based Activities", *Mathematics Educat.on*, vol. 10(2), pp. 53–65, June 2015.

[2] Manoel Wallece A. Ramos, Flank David M. Bezerra, "M´etodos de Euler e Runge-Kutta atrav´es de um Applet do GeoGebra", *XI EMED*, 2018.

[3] H. Dragoslav, H. Dorde, "Numerical Mathematics with GeoGebra in High School", *Teaching Mathematics and Computer Science*, vol. 6/2, pp. 363–378, Feb. 2008.

[4] Dariusz Majerek, "Application of GeoGebra for Teaching Mathemtatics", *Advances in Science and Technology Research Journal*, vol. 8/24, pp. 51–54, Dec. 2014.

[5] Z. Yılmaz, T. Enver, "Türev Uygulamaları Konusunun Öğretiminde GeoGebra Yazılımının Kullanılması", *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 22(3), sayfa 1209-1228, Eylül 2014.

[6] K. İbrahim, Y. İlyas, "The Effect of GeoGebra on Achievement of Preservice Mathematics Teachers About Concepts of Limit and Continuity", *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 11(1), sayfa 21-47, Haziran 2017.

[7] M. Hohenwarter, "GeoGebra-educational materials and applications for mathematics teaching", PhD thesis, University of Salzburg, Austria, 2006.

[8] C. Chapra Steven, P. Canale Raymond, *Numerical Methods for Engineers*, New York, USA: McGrawHill, 2006.

[9] T. Murat, "Dinamik Matematik Yazılımı GeoGebra ile Eğrisel İntegrallerin Görselleştirilmesi", Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi, 2010.
[10] U. Pınar, "GeoGebra ile Öğretimin 7.Sınıf Öğrencilerinin Akademik Başarılarına ve Geometriye Yönelik Tutumlarına Etkisi", Yüksek Lisans Tezi, Kastamonu Üniversitesi, 2014.
[11] F. Mehmet, "GeoGebra ve Cabri Geometri II Dinamik Geometri Yazılımlarının Web Destekli Ortamlarda Kullanılmasının Öğrenci Başarısına Etkisi", Yükek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, 2009.
[12] İ. Rukiye, "Bilgisayar Destekli Öğretimin Matematik Başarısına Etkisi: GeoGebra Örneği", Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, 2011.