

## Global Ağ Yapısına Dayalı Kuramoto Modelinde Senkronizasyonun Araştırılması

İrem Şenyer Yapıcı<sup>1</sup> and Rukiye Uzun<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Elektrik Elektronik Mühendisliği/Fen Bilimleri Enstitüsü, Bülent Ecevit Üniversitesi, Türkiye  
\*(rukizeuzun67@gmail.com)

**Özet** – Yapılan çalışmada senkronizasyon, Kuramoto osilatörlerinden oluşan çoklu bir sistemde global ağ yapısı kullanılarak incelenmiştir. Senkronizasyon performansı öncelikle zayıf bağlantılı bir sistemde ele alınarak, bağlantı kuvvetinin ve osilatör sayısının etkileri araştırılmıştır. Daha sonra sistemin kuvvetli bağlantıya sahip olması durumunda senkronizasyon performansında meydana gelen değişim irdelenmiştir. Bunun yanı sıra faz değişiminin senkronizasyon üzerindeki etkisi daha az osilatörün olduğu bir sistemde bağlantı kuvvetinin iki farklı değeri için incelenmiştir. Elde edilen bulgulara göre, zayıf bağlantılı bir sistemde osilatör sayısının senkronizasyon üzerinde etkili olmadığı ve böyle bir sistemde osilatör sayısı artırılrsa dahi sistemin tam senkronizasyona erişemediği tespit edilmiştir. Kuvvetli bağlantılı bir sistemde, belirli bir aralıktaki bağlantı kuvveti değerlerinde sistemin tam senkronizasyona eriştiği, bu aralığın dışında da senkronizasyonun azaldığı belirlenmiştir. Bağlantı kuvvetinin çok büyük değerlerinde sistemin tamamen senkronizasyonunun bozulduğu ve osilatörlerin birbirlerinden bağımsız hareket ettikleri görülmüştür. Ayrıca kritik eşik kuvvetinden küçük bağlantı kuvvetinde sistemdeki her bir osilatörün faz değişimlerinin farklı olduğu, aksi halde (kritik eşik kuvvetinden büyük bağlantı kuvvetinde) faz değişimlerinin birbirlerine yakın olduğu bulunmuştur.

*Anahtar Kelimeler* – Global ağ yapısı, Kuramoto model, Senkronizasyon, Ağ yapısı, Osilatör

**Abstract** – In the study synchronization was studied using an all-to-all network structure in a multiple system of Kuramoto oscillators. Synchronization performance was first investigated in a weakly connected system, and the effects of link strength and number of oscillators were investigated. Then, if the system has a strong connection, the change in synchronization performance is examined. In addition, the effect of phase variation on synchronization has been examined for two different values of coupling strength in a system using less oscillators. According to the findings, it is determined that the number of oscillators in a weakly connected system is not effective on synchronization and even if the number of oscillators is increased in such a system, the system can not reach full synchronization. It has been determined that, in a strongly connected system, the system has reached full synchronization at a certain range of link strength values, and synchronization has decreased outside this range. It has been seen that in the very great values of connection force, the system is completely synchronized and the oscillators move independently of each other. It is also found that the phase shifts of each oscillator in the system are different from the critical threshold force, otherwise (greater than the critical threshold force) the phase changes are close to each other.

*Keywords* – Global network structure, Kuramoto model, Synchronization, Network structure, Oscillator

---

### I. GİRİŞ

Doğada, günlük hayatta ve birçok farklı bilim alanında sıkça karşılaşılan senkronizasyon olgusu geçmişten günümüze önemini korumaktadır [1], [2]. Senkronizasyonun bu kadar geniş bir uygulama alanına sahip olması, bilim adamlarını senkronizasyonun oluşum mekanizmasının araştırılmasına yönlendirmiştir. Bu bağlamda birçok matematiksel yöntem geliştirilmiştir. Geliştirilen bu yöntemler içerisinde Yoshiki Kuramoto'nun kendi adını vermiş olduğu yöntem en çok tercih edilendir [3].

Kuramoto geliştirdiği modelde sistemdeki osilatörlerin tümünün birbiri ile bağlantılı ve aralarındaki etkileşimin zayıf olduğunu kabul etmiştir. Tüm osilatörlerin birbiri ile etkileşim halinde olduğu böyle bir yapı global ağ (all-to-all) yapısına benzemektedir. Kuramoto yaptığı çalışmada global ağ yapısına sahip zayıf etkileşimli bir sistemde senkronizasyonun oluşabilmesi için osilatörler arasındaki bağlantı kuvvetinin belirli bir eşik değerinden büyük olması gerektiğini ortaya koymuştur [4].

Günümüzde farklı ağ topolojilerinin ortaya çıkmasıyla senkronizasyon daha gerçekçi ağ yapılarında tanımlanan

sistemlerde incelenmeye başlanmıştır [2], [5], [6]. Yapılan çalışmalarla bağlantı kuvvetinin senkronizasyonun oluşumunda daha baskın olduğu ortaya koyulmuştur. Ağ yapısının çok da etkili olmadığı belirlenmiştir [2]. Bu bağlamda yapılan bu bildiri çalışmasında osilatörler arasındaki bağlantı global bir yapıda kabul edilerek öncelikle bağlantı kuvvetinin etkisi farklı etkileşimli sistemlerde (zayıf ve kuvvetli etkileşimli) irdelenmiştir. Bunun yanı sıra sistemdeki osilatör sayısındaki değişimin senkronizasyona etkisi araştırılmıştır. Öte yandan iki farklı bağlantı kuvveti değerinde sistemdeki osilatörlerin faz değişimlerinin nasıl olduğuna bakılmıştır.

### II. MATERYAL VE METOT

#### A. Kuramoto Model

Kuramoto modeli, fazları birbiriyle ilintili N adet özdeş osilatörden meydana gelen çoklu bir sistemdir. Sistemde osilatörler belirli bir içsel (doğal) frekansla hareket ederler. Sistemdeki osilatörlerin frekansları belirli bir olasılık dağılım fonksiyonuna göre dağılım gösterir [3].

Sistemdeki osilatörler arasındaki etkileşim şiddeti bağlantı kuvveti (K) olarak tanımlanır. Osilatörler arasında senkronize bir hareket gözlemlenebilmesi için bağlantı kuvvetinin belirli bir değerden büyük olması gerekir. Çok sayıda osilatör arasında senkronizasyonun görülmesi için gerekli olan bu bağlantı kuvveti değerine kritik eşik kuvveti (Kc) denir ve [7] :

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)} \quad (1)$$

eşitliği ile hesaplanır. Bağlantı kuvveti değerinin hesaplanan kritik eşik kuvvetinin değerinden küçük ( $K < K_c$ ) olduğu bir sistemde, osilatörlerin birbirlerini etkileme oranlarının az olması nedeniyle, sistemdeki her bir osilatör kendi içsel frekansı ile hareketine devam eder. Böyle bir sistemde osilatörler arasında senkronize hareket gözlenmez. Aksi durumda yani bağlantı kuvveti değerinin kritik eşik kuvveti değerinden büyük ( $K > K_c$ ) olması durumunda; osilatörler birbirlerini daha yüksek oranda etkileyerek, ortak bir faz değerinde senkronize şekilde birlikte hareket ederler [8], [9].

Kuramoto tarafından geliştirilen matematiksel yöntemde osilatörlerin zamana bağlı faz değişimi:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (2)$$

eşitliği ile verilir. Burada  $\theta_i$ , i. osilatörün fazı, K ( $K \geq 0$ ) bağlantı kuvveti değerini,  $\omega_i$  i. osilatörün açılal frekansını temsil eder.

Çoklu bir sistemin t zamanındaki senkronizasyonu düzen parametresi ile belirlenir. Düzen parametresi (r), sistemdeki her bir osilatörün fazlarının sanal ve reel kısımlarının normalleştirilmiş toplamlarını içeren karmaşık bir sayı olup [3], [4], [10]:

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)} \quad (3)$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada  $\psi(t)$  sistemin ortalama fazı ve r(t) de düzen parametresinin genlik değeridir. Sistemin senkronizasyon derecesine bağlı olarak düzen parametresinin genliği 0 ile 1 arasında değer alır. r(t)=0 olduğunda sistemdeki osilatörler birbirinden bağımsız hareket ederler, yani sistemde senkronize hareket gözlenmez. Aksi halde r(t)>0 iken sistemde senkronize hareket oluşmaya başlar. R(t)=1 olduğunda sistemdeki tüm osilatörler birlikte hareket etmeye başlarlar [11], [12]. Böyle bir durumda sistem tam senkronize olmuştur.

Osilatörlerin faz değişimini veren eşitlik (2), eşitlik (3)'deki düzen parametresinin kullanımıyla, r ve  $\psi$  parametrelerine bağlı olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

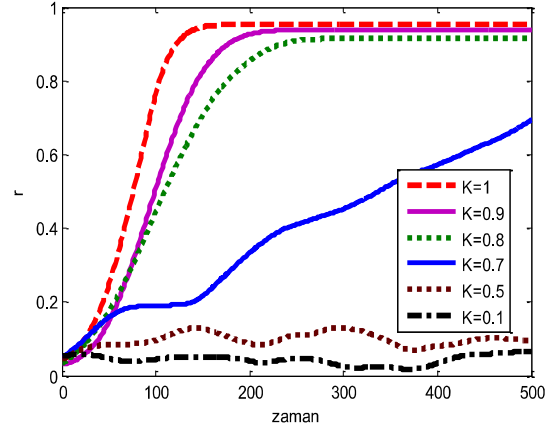
$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + Kr(t) \sin(\psi(t) - \theta_i) \quad (4)$$

### B. Global Ağ Yapısındaki Bir Sistemde Senkronizasyon

Çalışmanın bu kısmında osilatörler arasındaki bağlantının global ağ yapısına göre olduğu bir sistemde senkronizasyon incelenmiştir. Global ağ topolojisinde tüm düğümler birbirleriyle bağlantılı olacak şekilde bir yapı oluşturmaktadırlar. Faz denklemi Runge-Kutte metodu kullanılarak çözülmüştür. Sistemin kritik eşik kuvveti eşitlik (1) ile hesaplanarak 0.16 elde edilmiştir.

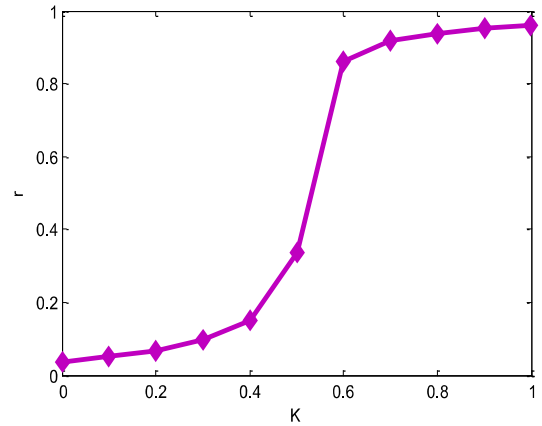
Öncelikle zayıf bağlantılı ( $0 < K < 1$ ) bir sistemde farklı bağlantı kuvvetlerinin, zamanla düzen parametresinin genliğinde meydana getirdiği değişim incelenmiştir (Şekil 1). Bunun için  $N=500$ ,  $t=500$  değerlerinde sabitlenmiştir. Şekilden görüldüğü üzere  $K=0.1$  olduğunda sistemde senkronizasyon gözlenmemiştir. Bağlantı kuvveti  $K > 0.1$

olduğunda ise kısmi senkronizasyon gözlenmiştir. Sistemde tanımlanan zayıf bağlantı kuvvetinin yeterli büyüklükte olmamasından dolayı tam senkronizasyon gözlenmemiştir.



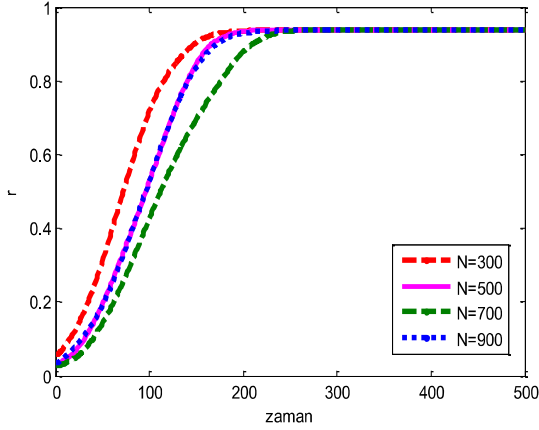
Şekil 1. Farklı bağlantı kuvvetinin düzen parametresinin genliğine etkisi (N=500).

Şekil 2'de osilatörler arasındaki bağlantının zayıf olduğu durumda düzen parametresinin genlik değeri gösterilmiştir. Sistemde bağlantı kuvvetinin değeri arttıkça senkronizasyon performansında artış gözlenmiştir. Zayıf bağlantı kuvvetlerinin tam senkronizasyon için yeterli olmadığı tespit edilmiştir.



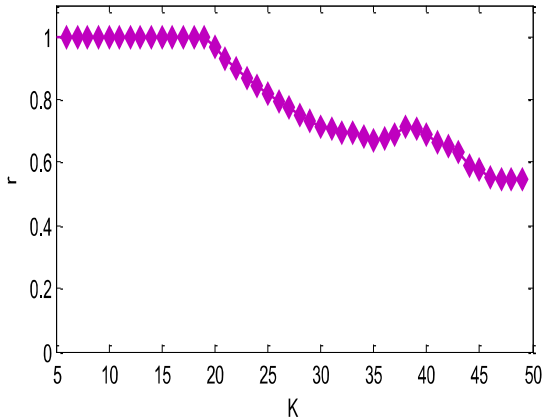
Şekil 2. Bağlantı kuvvetine göre düzen parametresinin genliğinin değişimi (N=500).

Şekil 3'de bağlantı kuvveti ( $K=0.9$ ) sabit bir değer alınarak farklı osilatör sayılarının senkronizasyon performansı üzerinde meydana getirdiği değişim incelenmiştir. Sistemde  $N=700$ 'e kadar osilatör sayısı arttıkça senkronizasyon performansı artmış fakat  $N=900$  olduğunda senkronizasyon artış göstermiştir. Osilatör sayısındaki artış senkronizasyonu bazen arttırmış, bazen de azaltmıştır. Böylece osilatör sayısındaki artış senkronizasyon performansında önemli bir sonuç yaratmadığı tespit edilmiştir.



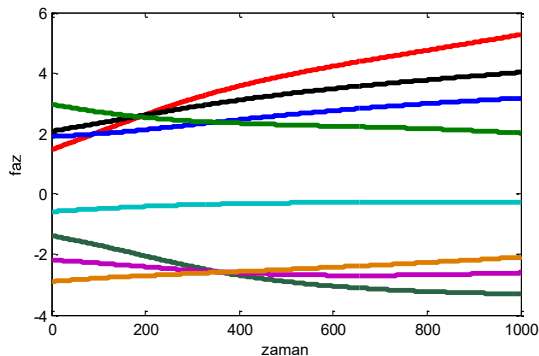
Şekil 3. Farklı osilatör sayılarının düzen parametresinin genliğine etkisi (K=0.9).

Şekil 4'de bağlantı kuvvetinin senkronizasyon performansı üzerindeki etkisine bakılmıştır. Yapılan çalışmada bağlantı kuvvetinin belirli bir değere kadar artırılmasıyla senkronizasyon performansının arttığı görülmüştür. Fakat bağlantı kuvvetinin artırılmaya devam edilmesiyle sistemin senkronizasyon performansının azalması noktasına geldiği tespit edilmiştir.



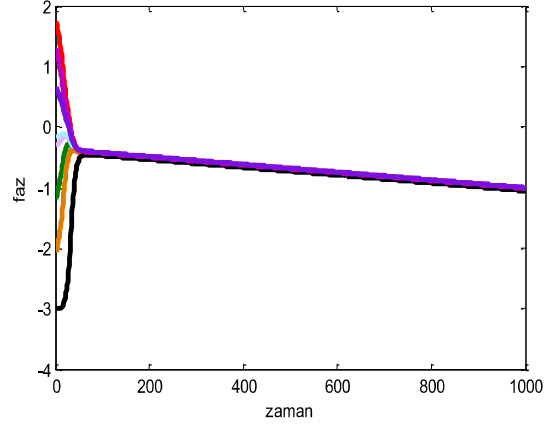
Şekil 4. Bağlantı kuvvetine göre düzen parametresinin genliğinin değişimi (N=500).

Şekil 5'de kritik eşik kuvvetinden küçük bağlantı kuvvetine sahip olan bir sistemde her bir osilatörün zamana bağlı faz dağılımları gösterilmiştir. Osilatörlerin faz dağılımının daha net görülebilmesi için N=8 olarak alınmıştır.  $K=0.05 < K_c$  olduğu durumda sistemdeki her bir osilatörün fazının birbirlerinden farklı değerlere sahip olduğu görülmüştür. Bundan dolayı sistemde senkronizasyon gözlenmemiştir.



Şekil 5. K=0.05 için sistemdeki her bir osilatörün faz dağılımı (N=8).

Şekil 6'de ise kritik eşik kuvvetinden büyük bağlantı kuvveti için osilatörlerin fazının zamanla nasıl değiştiği gösterilmiştir. N=8 ve K=2 olarak sabitlenmiştir. Bağlantı kuvvetinin kritik eşik kuvvetinden büyük olmasıyla osilatörlerin faz değerlerinin birbirine yakın olduğu görülmüştür. Böylece sistemde senkronizasyon gözlenmiştir.



Şekil 6. K=2 için sistemdeki her bir osilatörün faz dağılımı (N=8).

### III. SONUÇLAR

Elde edilen bulgulara göre global ağ yapısıyla oluşturulmuş olan Kuramoto osilatörlerinin aralarındaki bağlantının zayıf olması durumunda, bağlantı kuvvetindeki artışın senkronizasyon performansını arttırdığı ancak bağlantı kuvveti ne kadar artırılırsa artırılırsa tam senkronizasyon için yeterli olmadığı görülmüştür. Kuvvetli bağlantılı sistemde ise belirli bir aralık içerisindeki bağlantı kuvvetleri için sistemde tam senkronizasyon gözlenmiş olup, bu aralık dışındaki bağlantı kuvvetlerinin senkronizasyon performansını düşürdüğü tespit edilmiştir. Ayrıca osilatör sayısındaki artışın senkronizasyon üzerinde etkin bir rolünün olmadığı görülmüştür. Son olarak kritik eşik kuvvetinden küçük bağlantı kuvvetine sahip olan bir sistemde osilatörlerin faz dağılımının homojen olmadığı, bu yüzden sistemde senkronize davranışın oluşmadığı görülmüştür. Bunun yanı sıra kritik eşik kuvvetinden büyük bağlantı kuvveti için her bir osilatörün faz dağılımının benzer olduğu, dolayısıyla sistemde senkronizasyonun olduğu tespit edilmiştir.

### REFERENCES

- [1] Y. Kuramoto, *Chemical oscillations, waves, and turbulence*, Berlin, Springer Science & Business Media, 2012, vol. 19.
- [2] A. Arenas, A. D. Guiler, J. Kurths, Y. Moreno and C. Zhou, "Synchronization in complex networks" *Phys. Rep.*, vol. 469, pp. 93-153, Dec. 2008.
- [3] Y. Kuramoto, *In Int. Symp. on Mathematical problems in theoretical physics*, Lect. N. Phys., New York, Springer-Verlag, 1975, vol. 39.
- [4] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. Pérez-Vicente, F. Ritort, and R. Spigler, "The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena", *Rev. Mod. Phys.*, vol. 77, pp.137-185, Apr. 2005.
- [5] L. Ping and Y. Zhang, "Synchronization of Kuramoto oscillators in random complex networks", *Physica A*, vol. 387, pp. 1669-1674, Mar. 2008.
- [6] Y. Zhang and R. Xiao, "Synchronization of Kuramoto oscillators in small-world networks", *Physica A*, vol.416, pp. 33-40, Dec. 2014.
- [7] O. Shriki, D. Hansel, and H. Sompolinsky, "Rate models for conductance-based cortical neuronal networks", *Neural Computation*, vol. 15, pp. 1809-1841, Aug. 2003.

- [8] Y. Moreno and A.F. Pacheco, "Synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networks", *Europhys. Lett.*, vol. 68, pp.603–609, Nov. 2004.
- [9] A. Pikovsky, M. Rosenblum and J. Kurths, *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge University Press, 2003, vol.12.
- [10] P. Wetzel, "Effect of Distributed Delays in Systems of Coupled Phase Oscillators", Phd. thesis, Institut für Theoretische Physik, Dresden, Germany, Oct. 2012.
- [11] S.H. Strogatz, R.E. Mirollo, P.C. Matthews, "Coupled nonlinear oscillators below the synchronization threshold: relaxation by generalized Landau damping", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 68, pp. 2730–2733, May. 1992.
- [12] S. H. Strogatz, "From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators", *Phys. D*, vol. 143, pp. 1–20, 2000.