

Dinamik Hesap Modellerinin Kıyaslanması

Hikmet Hüseyin Çatal^{1*+}

¹Dokuz Eylül Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İzmir, Türkiye

*Corresponding author: huseyin.catal@deu.edu.tr

+Speaker: huseyin.catal@eu.edu.tr

Presentation/Paper Type: Oral / Full Paper

Özet – Taşıyıcı sistemlerin deprem, rüzgar gibi etkiler altında dinamik analizinde serbest titreşim analizi önemli bir yer tutmaktadır. Dinamik yükler altında taşıyıcı sistemlerin serbest titreşim analizi sürekli veya ayrık kütleli hesap modelleri kullanılarak gerçekleştirilmektedir. Sürekli kütleli hesap modelinde eğilme tesirlerinin yanı sıra, kesme tesirleri ve yüksek mertebeden kesme tesirleri dinamik analize dahil edilebilmektedir. Dinamik hesap modellerinde doğrusal ve doğrusal olmayan davranış ile P- δ etkileri hesaplamalarda dikkate alınabilmektedir. Taşıyıcı sistemlerin ayrık kütleli olarak modellenmesi halinde matris yöntemler de kullanılmaktadır. Ayrık hesap modelinde matris kullanılarak Taşıyıcı sistemlerin mesnetleri, zemin koşullarına bağlı olarak, yarı-rijit davrandığı kabul edilmesi halinde, sürekli veya ayrık kütleli hesap modellerinde mesnetler, zemini temsil eden doğrusal veya doğrusal davranmayan çökme, dönme yayaları ile modellenmektedir. Çalışmada, yüksek irtifalı, sabit en kesitli betonarme taşıyıcılı bir bacadın serbest titreşimine ait açılal frekansları, sürekli ve ayrık kütleli hesap modelleri kullanılarak hesaplanmıştır. Hesaplamalarda, dinamik hesap modellerinin temellerinin rijit ve yarı-rijit davranması durumları dikkate alınmış, elde edilen sonuçlar kıyaslanmıştır.

Anahtar kelimeler – Serbest titreşim, sürekli kütleli hesap modeli, ayrık kütleli hesap modeli, frekans, yarı-rijit mesnet.

I. GİRİŞ

Dinamik dış yükler altındaki taşıyıcı sistemlerin yapısal analizinde serbest titreşim önemli bir yer tutmaktadır. Taşıyıcı sistemlerin serbest titreşim analizi pek çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Doyle ve Pavlovic, elastik zemin üzerine oturan kirişleri sürekli hesap modeli ve değişkenlere ayırma yöntemi kullanarak incelemiştir [1]. Çatal kısmi gömülü kazıkların serbest titreşimine ait açılal frekans değerlerini sürekli kütleli hesap modeli kullanarak hesaplamıştır [2]. Bazı çalışmalarda kirişlerin sürekli hesap modeli kullanılarak serbest titreşim analizi diferansiyel transform metodu kullanılarak hesaplanmıştır [3],[4],[5]. Reddy-Bickford kiriş teorisi ve diferansiyel transform metodu kullanılarak kirişlerin serbest titreşim analizleri gerçekleştirilmiştir [6],[7]. Çatal, zemine kısmi gömülü ve uçları yarı-rijit bağlantılı kazıkların, serbest titreşimi sürekli kütleli hesap modeli kullanarak incelemiştir. Taşıyıcı sistemlerin dinamik analizi, ayrık kütleli hesap modeli ve matris yöntemler kullanılarak incelenmiştir [9],[10]. Çatal, çökme ve dönmeye karşı elastik yayalarla mesnetlendirilmiş bacadın serbest titreşimini incelemiştir [11]. Çatal elastik zemine oturan kirişlerin sürekli kütle yaklaşımıyla serbest titreşimini incelemiştir [12].

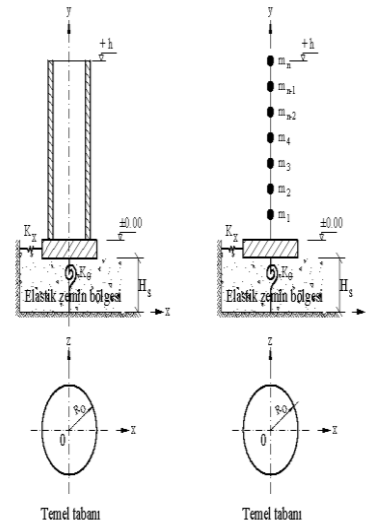
Bu çalışmada, sürekli ve ayrık kütleli hesap modeli kullanılarak zemine rijit ve yarı-rijit olarak mesnetlendirilmiş çok serbestlik dereceli sönümsüz sistemlerin dinamik analizi incelenmiştir.

II. DİNAMİK HESAP MODELLERİ

Taşıyıcı sistemlerin kütlesi, taşıyıcı sistem üzerinde yayılı olarak bulunmaktadır. Ancak dinamik analizde hesaplama kolaylığı sağlamak amacıyla sistemin kütleleri belirli noktalarda toplanmış olarak da kabul edilebilir. Kütleleri

sistem üzerinde yayılı olan dinamik hesap modeli sürekli kütleli, kütleleri belirli noktalarda toplanmış sistemin dinamik hesap modeli ise ayrık kütleli hesap modeli olarak tanımlanmaktadır. Yüksek irtifalı ve yarı-rijit mesnetli bir bacadın ayrık ve sürekli kütleli dinamik hesap modeli (Şekil-1)'de sunulmuştur [11].

Burada, h , taşıyıcı sistemin yüksekliğini; H_s elastik zemin yüksekliğini; k_x yatay ötelenme yayının rijitliğini; k_θ dönme yayının rijitliğini; R_0 taşıyıcı sistemin çapını; m_1, m_2, \dots, m_n tekil kütleleri göstermektedir.

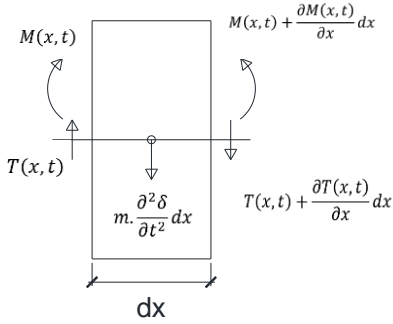


Şekil-1 sürekli ve ayrık kütleli hesap modeli.

Sürekli ve yayılı kütleli hesap modellerinde, taşıyıcı sistemin davranışının doğrusal elastik olduğu, küçük deplasmanlar ve Bernoulli Euler teorilerinin geçerli olduğu, ikinci mertebe tesirlerin terk edildiği kabul edilmiştir.

Sürekli Kütleli Hesap Modeli

Sürekli kütleli bir sistemden çıkartılan dx uzunluğundaki serbest cisim diagramında oluşan kuvvetler (Şekil-2)'de sunulmuştur.



Şekil-2: Serbest cisim diagramı

Burada M(y,t) eğilme momenti, T(y,t) kesme kuvveti fonksiyonlarını; m birim uzunluğa yayılı kütleli göstermektedir.

Şekil-2’de sunulan serbest cisim diagramında moment dengesi yazılır ise, serbest titreşimin yerdeğiştirmesine ait diferensiyel denklemi aşağıdaki gibidir [8],[9].

$$m \frac{\partial^2 \delta(y,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 \delta(y,t)}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

Burada, EI taşıyıcı sistemin eğilme rijitliğini, t zaman değişkenini, y konum değişkenini, δ(y,t) yerdeğiştirme fonksiyonunu göstermektedir.

Yerdeğiştirme fonksiyonu, φ(y) konum fonksiyonu ve z(t)=sin(ωt+θ) zaman fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\delta(y,t) = \phi(y) \cdot \sin(\omega t + \theta) \quad (2)$$

Burada θ faz açısını göstermektedir.

Değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak (1) numaralı diferensiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir [9].

$$\Phi(y) = C_1 \sinh(\lambda y) + C_2 \cosh(\lambda y) + C_3 \sin(\lambda y) + C_4 \cos(\lambda y) \quad (3)$$

(1) numaralı diferensiyel denklemin alt ucu zemine ankastre olarak bağlı, üst ucu serbest çubuğun sınır koşullarına bağlı olarak çözümünden ilk dört moda ait açısal frekansları (ω_i) sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır [9].

$$\omega_1 = \frac{3.516}{h^2} \left(\frac{EI}{m} \right)^{0.5} \quad \omega_2 = \frac{22.03}{h^2} \left(\frac{EI}{m} \right)^{0.5}$$

$$\omega_3 = \frac{61.7}{h^2} \left(\frac{EI}{m} \right)^{0.5} \quad \omega_4 = \frac{120.9}{h^2} \left(\frac{EI}{m} \right)^{0.5} \quad (4)$$

Burada, C₁,...,C₄ integral sabitlerini,

$$\lambda^4 = \frac{m\omega^2}{EI} \quad (5)$$

göstermektedir.

Alt ucu, zemine dönme rijitliği K_θ olan elastik yay ile üst ucu ise serbest olan (şekil-1)’de sunulan sistemin sınır koşulları aşağıdaki gibidir.

$$\Phi(y=0) = 0 \quad (6)$$

$$EI\phi^{IV}(y=h) = 0 \quad (7)$$

$$EI\phi^{III}(y=h) = 0 \quad (8)$$

$$\phi^I(y=0) = M(y=0)/K_\theta \quad (9)$$

(6)-(9) numaralı sınır koşulları matris formda aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_5 & k_6 & k_7 & k_8 \\ k_9 & k_{10} & k_{11} & k_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Burada k₁=λsinh(λh); k₂=λcosh(λh); k₃=λsin(λh); k₄=λ³ cos(λh); k₅=λ³ cosh(λh); k₆=λ³ sinh(λh); k₇=λ³ sin(λh); k₈=-λ³ cos(λh); k₉=-EIλ²; k₁₀=λ; k₁₁=EIλ²; k₁₂=λ göstermektedir.

(10) numaralı matris denklemin non-trivial çözüm koşulu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_5 & k_6 & k_7 & k_8 \\ k_9 & k_{10} & k_{11} & k_{12} \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

(11) numaralı bağıntıdan, alt ucu zemine dönme yayı ile mesnetlendirilmiş, üst ucu serbest olan sistemin frekans denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f(\lambda) = 2EI k_\theta \lambda^7 [\cos(\lambda h) \sinh(\lambda h) - \cosh(\lambda h) \sin(\lambda h)] + k_\theta \lambda^6 [\cos(\lambda h) + 2\cos(\lambda h) \cosh(\lambda h) + \cosh^2(\lambda h) + \sin^2(\lambda h) - \sinh^2(\lambda h)] \quad (12)$$

Ayrık Kütleli Hesap Modeli

Kütleleri belirli noktalarda topaklanmış, (Şekil-1)’de sunulan sistemin kütlelerinin yerdeğiştirmesine ait matris-diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi yazılır [11],[12].

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{0\} \quad (13)$$

Burada, $\{\delta\}$ ve $\{\ddot{\delta}\}$ sırasıyla kütlelerin yerdeğiştirme ve ivme vektörlerini, $[M]$ kütle matrisini, $[K]$ yatay rijitlik matrisini göstermektedir.

Ayrık kütleli hesap modelinde, kütlelerin sadece kendi düzlemleri içerisinde yerdeğiştirmesi dikkate alındığında diagonal bir matris olup, $(n=1,2,3,\dots)$ kütle adedini göstermek üzere aşağıdaki gibi yazılır [12].

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix} \quad (14)$$

Kütlelerin yerdeğiştirme ve ivme vektörleri $\{a_i\}$ genlik vektörünü göstermek üzere aşağıdaki gibi yazılır.

$$\{\delta\} = \{a_i\}e^{i\omega t} \quad (15)$$

$$\{\ddot{\delta}\} = -\omega^2\{a_i\}e^{i\omega t} \quad (16)$$

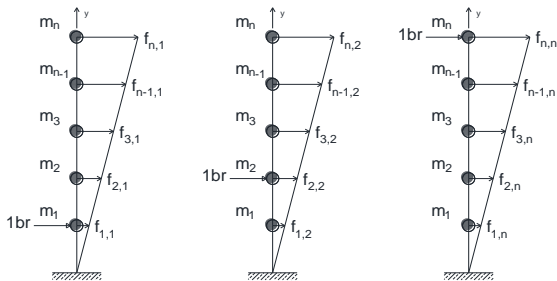
(13) numaralı matris diferansiyel denklemde, ivme vektörü yerine (16) numaralı değeri, yerdeğiştirme vektörü yerine (15) numaralı değeri yazılır ise aşağıdaki bağıntı elde edilir [12].

$$\left[[D] - \frac{1}{\omega^2} [I] \right] \{a_i\} = \{0\} \quad (17)$$

Burada, $[I]$ birim vektörü, $[D]$ dinamik matrisi göstermektedir. Dinamik matris aşağıdaki gibi yazılır.

$$[D]=[F][M] \quad (18)$$

Burada, $[F]$ fleksibilite matrisini göstermekte olup bu matrisin elemanları, (Şekil-3)'de sunulduğu gibi topaklanmış herbir kütleyle 1 birim kuvvet uygulanmak suretiyle kütlelerin yerdeğiştirme değerlerinden teşkil edilmektedir.



Şekil-3:Fleksibilite matrisinin elemanları.

n adet ayrık kütleyle sahip sistemin Fleksibilite matrisi aşağıdaki gibi yazılır. Kütleler arası mesafeler eşit (h) olarak alınmıştır.

$$[F] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdot & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdot & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdot & f_{nn} \end{bmatrix} \quad (19)$$

(17) numaralı denklemin çözüm koşulu aşağıdaki gibidir.

$$\left| [D] - \frac{1}{\omega^2} [I] \right| = 0 \quad (20)$$

(20) numaralı bağıntı özdeğer-özvektör problemini tanımlamakta olup, elde edilen özdeğerler modlara ait açılal frekansları, özvektörler ise mod vektörlerini vermektedir.

Zemine elastik K_θ dönme yayı ile yarı-rijit mesnetlendirilmiş, ayrık kütleli modelin 1 inci külesine 1 birim yatay yük yüklemek suretiyle çift integrasyon yöntemi kullanılarak, 1 inci kütleyle 1 birim yatay yük yüklenmesi halinde yarı-rijit mesnet ile 1 inci kütle arasında geçerli olan yerdeğiştirme fonksiyonu aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\delta_{11}(y) = \frac{1}{6EI} y^3 + \left[\frac{-h}{K_\theta} - \frac{h^2}{2EI} \right] y + \frac{h^2}{K_\theta} + \frac{h^3}{3EI} \quad (21)$$

(21) numaralı fonksiyonda $y=h$ yazılır ise fleksibilite matrisinin f_{11} inci elemanı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$f_{11} = \frac{h^3}{3EI} + \frac{h^2}{K_\theta} \quad (22)$$

1 inci kütleyle 1 birim yatay yük yüklenmesi halinde 1 inci kütle ile diğer kütleler arasında geçerli olan yerdeğiştirme değerleri $j=2,3,4,\dots,n$ değişkeni yerdeğiştirmenin hesaplanacağı kütle numarasını göstermek üzere aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$f_{j1} = \left[\frac{1}{K_\theta} + \frac{h}{2EI} \right] h^2(j-1) + h^2 \left[\frac{h}{3EI} + \frac{1}{K_\theta} \right] \quad (23)$$

Ayrık kütleli modelin 2 inci külesine 1 birim yatay yük yüklemek suretiyle çift integrasyon yöntemi kullanılarak yarı-rijit mesnet ile 1 inci kütle arasında geçerli olan yerdeğiştirme fonksiyonu aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\delta_{22}(y) = \frac{1}{6EI} y^3 + \left[\frac{-2h}{K_\theta} - \frac{2h}{EI} \right] y + \frac{8h^3}{3EI} + \frac{4h^2}{K_\theta} \quad (24)$$

(24) numaralı fonksiyonda $y=h$ yazılır ise fleksibilite matrisinin f_{12} inci elemanı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$f_{12} = h^2 \left[\frac{5h}{6EI} + \frac{2}{K_\theta} \right] \quad (25)$$

Ayrık kütleli modelin 2 inci kütesine 1 birim yatay yük yüklenmesi halinde 2 inci kütle nin yerdeğiştirmesi (fleksibilite matrisinin f_{22} terimi) (24) numara lı bağıntıda $y=0$ yazılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_{22} = h^2 \left[\frac{8h}{3EI} + \frac{4}{K_0} \right] \quad (26)$$

2 inci kütle ye 1 birim yatay yük yüklenmesi halinde 2 inci kütle ile diğer kütleler arasında geçerli olan yerdeğiştirme değerleri $j=3,4,5...n$ değişkeni yerdeğiştirmenin hesaplanacağı kütle numarasını göstermek üzere aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$f_{j2} = \left[\frac{2}{K_0} + \frac{2h}{EI} \right] h^2 (j-2) + h^2 \left[\frac{8h}{3EI} + \frac{4}{K_0} \right] \quad (27)$$

Ayrık kütleli modelin 3 üncü kütesine 1 birim yatay yük yüklemek suretiyle çift integrasyon yöntemi kullanılarak yarı-rijit mesnet ile 3 üncü kütle arasında geçerli olan yerdeğiştirme fonksiyonu aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\delta_{33}(y) = \frac{1}{6EI} y^3 - \left[\frac{3h}{K_0} + \frac{9h^2}{2EI} \right] y + \frac{9h^2}{K_0} + \frac{54h^3}{6EI} \quad (28)$$

(28) numaralı bağıntıda, $y=2h$ yazılarak, fleksibilite matrisinin f_{13} üncü elamanı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$f_{13} = h^2 \left[\frac{8h}{6EI} + \frac{3}{K_0} \right] \quad (29)$$

(28) numaralı bağıntıda, $y=h$ yazılarak, fleksibilite matrisinin f_{23} üncü elamanı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$f_{23} = h^2 \left[\frac{14h}{3EI} + \frac{6}{K_0} \right] \quad (30)$$

(28) numaralı bağıntıda, $y=0$ yazılarak, fleksibilite matrisinin f_{33} üncü elamanı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$f_{33} = h^2 \left[\frac{54h}{6EI} + \frac{9}{K_0} \right] \quad (31)$$

3 üncü kütle ye 1 birim yatay yük yüklenmesi halinde 3 üncü kütle ile diğer kütleler arasında geçerli olan yerdeğiştirme değerleri $j=4,5,6...n$ değişkeni yerdeğiştirmenin hesaplanacağı kütle numarasını göstermek üzere aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$f_{j3} = \left[\frac{3}{K_0} + \frac{9h}{EI} \right] h^2 (j-3) + h^2 \left[\frac{27h}{3EI} + \frac{9}{K_0} \right] \quad (32)$$

Ayrık kütleli modelin 4 üncü kütesine 1 birim yatay yük yüklemek suretiyle çift integrasyon yöntemi kullanılarak yarı-rijit mesnet ile 4 üncü kütle arasında geçerli olan yerdeğiştirme fonksiyonu aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\delta_{44}(y) = \frac{1}{6EI} y^3 - \left[\frac{4h}{K_0} + \frac{8h^2}{EI} \right] y + \frac{16h^2}{K_0} + \frac{64h^3}{3EI} \quad (33)$$

(33) numaralı bağıntıda, sırasıyla $y=3h$, $y=2h$, $y=h$ ve $y=0$ yazılarak, fleksibilite matrisinin f_{14} , f_{24} , f_{34} ve f_{44} üncü elamanı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$f_{14} = h^2 \left[\frac{11h}{6EI} + \frac{4}{K_0} \right] \quad (34)$$

$$f_{24} = h^2 \left[\frac{20h}{3EI} + \frac{8}{K_0} \right] \quad (35)$$

$$f_{34} = h^2 \left[\frac{81h}{6EI} + \frac{12}{K_0} \right] \quad (36)$$

$$f_{44} = h^2 \left[\frac{64h}{3EI} + \frac{16}{K_0} \right] \quad (37)$$

Sistemin ayrık kütle adedine bağlı olarak f_{ji} fleksibilite matrisinin değerleri benzer şekilde hesaplanabilmektedir.

Sayısal Uygulama

Yüksekliği $h=20m$, çapı $6.2m$, cidar kalınlığı $0.6m$ olan dairesel, sabit en kesitli bir baca (şekil-4), elastik zemin üzerine yarıçapı $R_0=4.1m$ olan bir temel ile mesnetlendirilmiştir. Zeminin, değişkenlerine bağlı olarak, baca temelinin dönme yapabildiği varsayılmaktadır. Bacanın eğilme rijitliği $EI=83,70.10^6 \text{ tm}^2$, yayılı kütesi $m=3 \text{ ts}^2/\text{m}^2$ olarak verilmiştir. Bacanın zemine oturduğu alt uçta elastik yay katsayıları (K_0) sonsuz ($10.101^3 \text{ tm/radyan}$), $10.10^4 \text{ tm/radyan}$, $20.10^4 \text{ tm/radyan}$, $30.10^4 \text{ tm/radyan}$, $40.10^4 \text{ tm/radyan}$, ve $50.10^4 \text{ tm/radyan}$ alınmıştır.

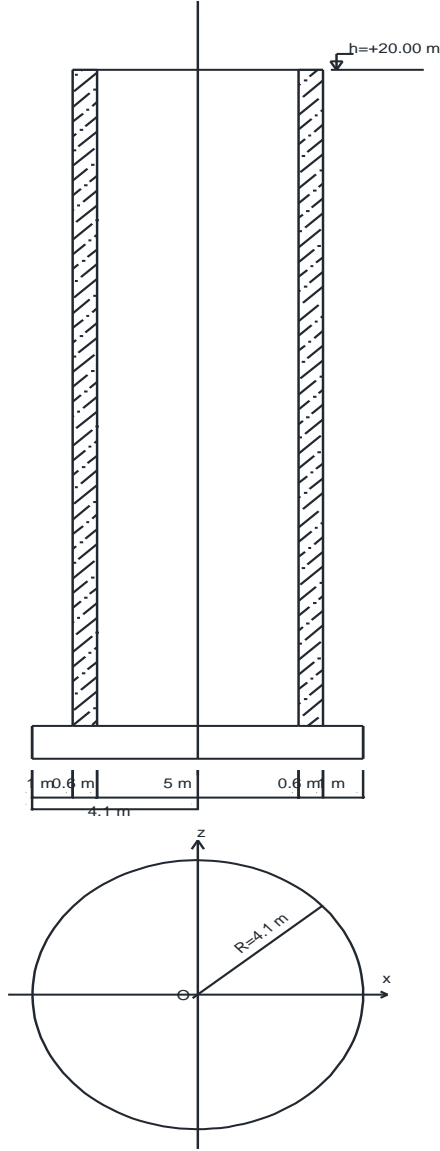
Bacanın ilk üç moduna ait açısıl frekansları, sürekli ve ayrık hesap modeli dikkate alınarak hesaplanmıştır.

Bacanın temelinin rijit olduğu kabul edilerek sürekli hesap modeli esas alınarak ilk üç açısıl frekans (4) numaralı bağıntılar kullanılarak aşağıda hesaplanmıştır.

1 inci moda ait açısıl frekans değerleri

$$\omega_1 = \frac{3,516 \left(\frac{EI}{m} \right)^{0.5}}{h^2} = \frac{3,516 \left(\frac{83,70 \cdot 10^6}{3} \right)^{0.5}}{20^2} = 46,43 \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = \frac{61,7 \left(\frac{EI}{m} \right)^{0.5}}{h^2} = \frac{61,7 \left(\frac{83,70 \cdot 10^6}{3} \right)^{0.5}}{20^2} = 814,75 \text{ rad/s}$$



Şekil 4 Sabit en kesitli sanayi bacası.

2 inci moda ait açısıl frekans değeri

$$\omega_2 = \frac{22,03 \left(\frac{EI}{m} \right)^{0.5}}{h^2} = \frac{22,03 \left(\frac{83,70 \cdot 10^6}{3} \right)^{0.5}}{20^2} = 290,90 \text{ rad/s}$$

3 üncü moda ait açısıl frekans değeri

Sürekli hesap modeli kullanılarak, yarı-rijit temeli olan bacanın, yay rijitliklerine bağlı olarak ilk üç moda ait açısıl frekansları (12) numaralı frekans denklemi kullanılarak hesaplanmıştır. (12) numaralı fonksiyonunu sıfır kılan λ değerlerini bulmak için λ değişkenine küçük artım değerleri atayan ve yazar tarafından yazılan bilgisayar programı kullanılmıştır. Yay rijitliklerine bağlı olarak hesaplanan açısıl frekans değerleri (Çizelge-1)'de sunulmuştur.

Çizelge-1 Sürekli hesap modeli kullanılarak hesaplanan yarı- rijit olarak mesnetlenmiş bacanın ilk üç açısıl frekans değerleri

K_θ (tm/radyan)	ω_1 (radyan/s)	ω_2 (radyan/s)	ω_3 (radyan/s)
$10 \cdot 10^4$	3,301	204,990	647,050
$20 \cdot 10^4$	4,750	210,870	660,910
$30 \cdot 10^4$	6,106	214,703	665,503
$50 \cdot 10^4$	7,627	227,180	673,410
$10 \cdot 10^{13}$	48,670	291,700	815,800

Bacanın ayrık dinamik hesap modeli için, bacanın kütlelerinin eşit aralıklı 2,3 ve 4 noktada topaklandığı kanul edilmiştir.

Kütleleri $m_1=m_2=30 \text{ ts}^2/\text{m}$ olan, 10 m. aralıklı 2 noktada; kütleleri $m_1=m_2=m_3=20 \text{ ts}^2/\text{m}$ olan 6,66 m. aralıklı olarak 3 noktada ve kütleleri $m_1=m_2=m_3=m_4=15 \text{ ts}^2/\text{m}$ olan, 5 m aralıklı 4 noktada topaklanmış kütleli ayrık dinamik hesap modellerinin $K_\theta=10 \cdot 10^4 \text{ tm/radyan}$, $K_\theta=50 \cdot 10^4 \text{ tm/radyan}$ ve $K_\theta=10 \cdot 10^{10} \text{ tm/radyan}$ değerleri için fleksibilite matrisleri [F] ve (18) numaralı bağıntı kullanılarak dinamik matrisleri [D] aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$K_\theta=10 \cdot 10^4 \text{ tm/radyan}$ değerleri için 2 noktada topaklanmış ayrık dinamik hesap modelinin fleksibilite ve dinamik matrisleri ($m_1=m_2=30 \text{ ts}^2/\text{m}$, $h=10\text{m}$, $EI=83,7 \cdot 10^6 \text{ tm}^2$)

$$[F] = \begin{bmatrix} 1.004 & 2.010 \\ 2.010 & 4.032 \end{bmatrix} 10^{-3}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 0.0301 & 0.0603 \\ 0.0613 & 0.1209 \end{bmatrix}$$

$K_\theta=10 \cdot 10^4 \text{ tm/radyan}$ değerleri için 3 noktada topaklanmış ayrık dinamik hesap modelinin fleksibilite ve dinamik matrisleri ($m_1=m_2=m_3=20 \text{ ts}^2/\text{m}$, $h=6,66 \text{ m}$, $EI=83,7 \cdot 10^6 \text{ tm}^2$)

$$[F] = \begin{bmatrix} 0.447 & 0.890 & 1.335 \\ 0.890 & 1.784 & 2.667 \\ 1.335 & 2.677 & 4.023 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 8.94 & 17.8 & 26.7 \\ 17.8 & 35.68 & 53.54 \\ 26.7 & 53.54 & 80.46 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$K_0=10.10^4$ tm/radyan değerleri için 4 noktada topaklanmış ayrık dinamik hesap modelinin fleksibilite ve dinamik matrisleri ($m_1=m_2=m_3=m_4= 15 \text{ ts}^2/\text{m}$, $h=5,0 \text{ m}$, $EI=83,7.10^6 \text{ tm}^2$)

$$[F] = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.50 & 0.75 & 1.00 \\ 0.50 & 1.00 & 1.50 & 2.00 \\ 0.75 & 1.50 & 2.26 & 3.02 \\ 1.00 & 2.00 & 3.02 & 4.03 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 3.77 & 7.51 & 11.27 & 15.03 \\ 7.51 & 15.05 & 22.59 & 30.14 \\ 11.27 & 22.59 & 33.94 & 45.28 \\ 15.03 & 33.94 & 45.28 & 60.45 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$K_0=50.10^4$ tm/radyan değerleri için 2 noktada topaklanmış ayrık dinamik hesap modelinin fleksibilite ve dinamik matrisleri ($m_1=m_2= 30 \text{ ts}^2/\text{m}$, $h=10\text{m}$, $EI=83,7.10^6 \text{ tm}^2$)

$$[F] = \begin{bmatrix} 2.038 & 4.095 \\ 4.095 & 8.304 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 6.114 & 12.285 \\ 4.095 & 8.304 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$K_0=50.10^4$ tm/radyan değerleri için 3 noktada topaklanmış ayrık dinamik hesap modelinin fleksibilite ve dinamik matrisleri ($m_1=m_2=m_3=20 \text{ ts}^2/\text{m}$, $h=6,66 \text{ m}$, $EI=83,7.10^6 \text{ tm}^2$)

$$[F] = \begin{bmatrix} 8.984 & 18.023 & 27.062 \\ 18.023 & 36.382 & 54.798 \\ 27.062 & 54.798 & 82.871 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 1.796 & 3.604 & 5.412 \\ 3.604 & 7.276 & 10.959 \\ 5.412 & 10.959 & 16.574 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$K_0=50.10^4$ tm/radyan değerleri için 4 noktada topaklanmış ayrık dinamik hesap modelinin fleksibilite ve dinamik matrisleri ($m_1=m_2=m_3=m_4= 15 \text{ ts}^2/\text{m}$, $h=5,0 \text{ m}$, $EI=83,7.10^6 \text{ tm}^2$)

$$[F] = \begin{bmatrix} 5.047 & 10.118 & 15.190 & 20.261 \\ 10.118 & 20.380 & 30.665 & 40.950 \\ 15.190 & 30.665 & 46.282 & 61.924 \\ 20.261 & 30.665 & 61.924 & 83.041 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 3.77 & 7.51 & 11.27 & 15.03 \\ 7.51 & 15.05 & 22.59 & 30.14 \\ 11.27 & 22.59 & 33.94 & 45.28 \\ 15.03 & 33.94 & 45.28 & 60.45 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$K_0=10.10^{10}$ tm/radyan değerleri için 2 noktada topaklanmış ayrık dinamik hesap modelinin fleksibilite ve dinamik matrisleri ($m_1=m_2= 30 \text{ ts}^2/\text{m}$, $h=10\text{m}$, $EI=83,7.10^6 \text{ tm}^2$)

$$[F] = \begin{bmatrix} 3.801 & 9.504 \\ 9.504 & 30.411 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 0.114 & 0.285 \\ 0.285 & 0.912 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$K_0=10.10^{10}$ tm/radyan değerleri için 3 noktada topaklanmış ayrık dinamik hesap modelinin fleksibilite ve dinamik matrisleri ($m_1=m_2=m_3=20 \text{ ts}^2/\text{m}$, $h=6,66 \text{ m}$, $EI=83,7.10^6 \text{ tm}^2$)

$$[F] = \begin{bmatrix} 1.123 & 2.807 & 4.492 \\ 2.807 & 8.984 & 15.721 \\ 4.492 & 15.721 & 30.319 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 0.022 & 0.056 & 0.089 \\ 0.056 & 0.179 & 0.314 \\ 0.089 & 0.314 & 0.606 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$K_0=10.10^{10}$ tm/radyan değerleri için 4 noktada topaklanmış ayrık dinamik hesap modelinin fleksibilite ve dinamik matrisleri ($m_1=m_2=m_3=m_4= 15 \text{ ts}^2/\text{m}$, $h=5,0 \text{ m}$, $EI=83,7.10^6 \text{ tm}^2$)

$$[F] = \begin{bmatrix} 4.753 & 11.882 & 19.011 & 26.14 \\ 11.882 & 38.018 & 66.529 & 95.041 \\ 19.011 & 66.529 & 128.301 & 192.447 \\ 26.14 & 66.529 & 192.447 & 304.107 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7}$$

$$[D]= \begin{bmatrix} 7.75 & 15.17 & 22.78 & 30.39 \\ 15.17 & 30.57 & 45.99 & 61.42 \\ 22.78 & 45.99 & 63.42 & 92.88 \\ 30.39 & 61.42 & 92.88 & 124.56 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

Ayrık kütleli dinamik hesap modellerinin açısal frekansları (20) numaralı özdeğer-özvektör probleminin çözümü olarak hesaplanmış ve çizelge 2 –çizelge 4’de sunulmuştur.

Çizelge-2 $K_0=10.10^4$ tm/rad için ayrık kütleli hesap modelinin açısal frekansları

Kütle adedi	ω_1 (radyan/s)	ω_2 (radyan/s)	ω_3 (radyan/s)	ω_4 (radyan/s)
2	2.573	144.57	-	-
3	2.839	158.51	519.87	-
4	2.972	159.31	298.31	833.91

Çizelge-3 $K_0=50.10^4$ tm/rad için ayrık kütleli hesap modelinin açısal frekansları

Kütle adedi	ω_1 (radyan/s)	ω_2 (radyan/s)	ω_3 (radyan/s)	ω_4 (radyan/s)
2	5.68	149.25	-	-
3	6.25	163.29	533.00	-
4	6.56	171.49	564.33	1138.12

Çizelge-3 $K_0=50.10^4$ tm/rad için ayrık kütleli hesap modelinin açısal frekansları

Kütle adedi	ω_1 (radyan/s)	ω_2 (radyan/s)	ω_3 (radyan/s)	ω_4 (radyan/s)
2	31.62	210.02	-	-
3	35.64	233.76	627.46	-
4	37.97	244.70	691.71	1250.0

III. SAYISAL SONUÇLAR

Çok serbestlik dereceli sistemin serbest titreşimine ait açısal frekans değerleri, temel rijit veya yarı rijit davranışına göre farklı değerlere ulaşmaktadır. Çizelge-12de görüldüğü üzere, temel ile çok serbestlik dereceli sistemin bağlantı noktası olan kısmın rijitliği arttıkça modan bağımsız olarak açısal frekans değerleri yükselmektedir. Bu artış 1 inci moda ait açısal frekanslarda daha fazladır.

Açısal frekansların artması sistemin periyot değerlerini düşürmektedir.

IV. TARTIŞMA

Taşıyıcı sistemlerin zemin-yapı etkileşimi göz önünde bulundurulmak suretiyle tasarım ve imalat gerçekleştirilmelidir. Bu durum dinamik etkiler olması halinde de ortaya çıkmaktadır.

V. SONUÇLAR

Taşıyıcı sistemlerin dinamik hesabında, ayrık kütle modeli hesaplamaların kolaylığı yönünden fayda sağlamaktadır. Sürekli kütle modelinin dikkate alınması halinde çözülmesi gerekli olan denklemlerdeki matematiksel operasyonlar detay gerektirmektedir.

Taşıyıcı sistemlerin dinamik tasarımında ve imalatında zemin yapı etkileşimi göz önüne alınmalıdır.

KAYNAKLAR

- [1] Doyle PF., Pavlovic M. “Vibration of beams on partial elastic foundations”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*; Vol 10, pp 663-674, 1982
- [2] Çatal, H.H. “Free vibration of partially supported piles with the effects of bending moment, axial and shear force”, *Engineering Structures*; Vol 24, pp 1615-1672, 2002
- [3] Bozyigit, B., Yesilce, Y., Çatal, S. “Free vibrations of axial-loaded beams resting on viscoelastic foundation using Adomian decomposition method and differential transformation”, *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 21(6), pp. 1181-1193, December 2018
- [4] . Çatal, S. "Response of forced Euler-Bernoulli beams using differential transform method", *Structural Engineering and Mechanics*; Vol 42(1), pp 95-119, April 2012
- [5] . Çatal, S. “Solution of free vibration equations of beam on elastic soil by using differential transform method”, *Applied Mathematical Modelling*; Engelnars, Vol 32, pp 1744 -1757, September 2008
- [6] Yesilce, Y., Catal, S. “ Free vibration of axially loaded Reddy-Bickford beam on elastic soil using the differential transform method”, *Structural Engineering and Mechanics*; Vol 31(4), pp 453-475, March 2009
- [7] Yesilce Y., Çatal H.H. “Solution of free vibration equations of semi-rigid connected Reddy-Bickford beams resting on elastic soil using differential transform method”, *Archive of Applied Mechanics*, Vol 81, pp 199-213, February 2011
- [8] Çatal H.H. “ Free vibration of semi-rigid connected and partially embedded piles with effects of the bending moment, axial and shear force”, *Engineering Structures*, Vol 28, pp 1911-1918, December 2006
- [9] Chopra AK., *Dynamics of Structures*, USA, Prentice Hall, 1995
- [10] Clough RW., Penzien J., *Dynamics of Structures*, USA, Computers and Structures, 2010
- [11] Çatal H.H. “Baca Dinamiği”, *Bülten*, Sayı 143, sayfa 18-23, 2008
- [12] Çatal H.H., Yesilce Y. “*Yapı Dinamiği*” İzmir, Türkiye, Birsen Yayınevi, 2017