

# BASİT MESNETLİ KİRİŞİN DİFERANSİYEL TRANSFORM METODUYLA SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Seval Çatal

Dokuz Eylül Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İzmir, Turkey

\*Corresponding author: [seval.catal@deu.edu.tr](mailto:seval.catal@deu.edu.tr)

Speaker: [seval.catal@eu.edu.tr](mailto:seval.catal@eu.edu.tr)

Presentation/Paper Type: Oral / Full Paper

**Özet** – Taşıyıcı elemanların zorlanmış titreşimlerin analizinde, serbest titreşim analizi önemli bir yer tutmaktadır. Kirişlerin yapısal davranışının incelenmesinde sadece eğilme tesirlerinin dikkate alındığı teoriye Euler kiriş teorisi denilmektedir. Mühendislik analizlerinde Euler kiriş teorisi yaygın olarak kullanılmaktadır. Sürekli kütleli dinamik hesap modeli kurulan Euler kiriş teorisine uyan kirişin serbest titreşimine ait homojen kısmi diferansiyel denklemin dördüncü mertebeden olduğu bilinmektedir. Bu denklemin analitik çözümü neticesinde açılal frekanslarının hesaplanabilmesi için başlangıç ve sınır koşulları kullanılarak elde edilen frekans denkleminin köklerinin bulunması yeterlidir. Bu tür diferansiyel denklemlerin uygulaması geçmişte elektrik devrelerinin analizinde kullanılan diferansiyel transform metodu (DTM) ile çözümü mümkündür. İteratif bir çözümü olan yöntemde kullanılan terim sayısı arttıkça sayıl çözüm sonuçları, analitik çözüm sonuçlarıyla örtüşmektedir. Çalışmada her iki ucu basit olarak mesnetlendirilmiş Euler kirişinin ilk üç moduna ait açılal frekanslarının DTM ile çözüm adımları sunulmuş, bu yöntem ve analitik çözüm yöntemi kullanılarak elde edilen açılal frekans değerlerinin kıyaslaması sayısal örneklerle sunulmuştur.

**Anahtar Kelimeler** – Diferansiyel transform metodu, serbest titreşim, açılal frekans, mod, Euler Kiriş Teorisi

## I. GİRİŞ

Zorlanmış titreşim hareketinin incelenmesinde, kirişin serbest titreşimine ait frekans ve periyotların bulunması gerekmektedir. Kirişlerin davranışına göre serbest titreşime ait literatürde çok sayıda araştırma bulunmaktadır [1],[2],[3]. Bu çalışmalarda, kirişlerin serbest titreşimine ait açılal frekans ve periyotları analitik olarak hesaplanmıştır. Elastik zemine oturan, elastik zemine kısmi gömülü kazıkların serbest titreşimine ait açılal frekanslar analitik yöntemle elde edilmiştir [4],[5]. Yüksek mertebeden kesme tesirlerinin dikkate alındığı Reddy-Bickford Kiriş Teorisine veya Timoshenko Kiriş Teorisine uygun davranan kirişlerin serbest titreşimine ait çalışmalar mevcuttur [6],[7].

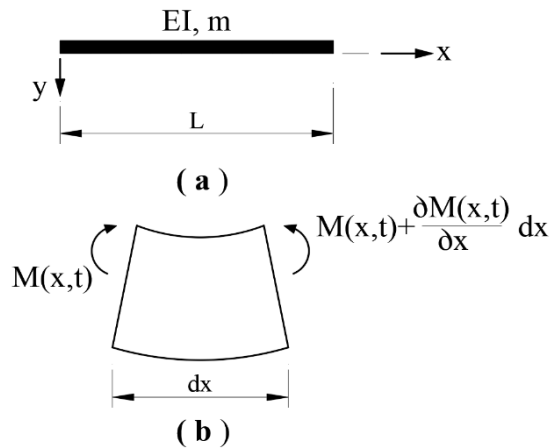
İteratif bir yaklaşım metodu olan Diferansiyel Transformasyon Metodu (DTM), ilk defa elektrik devrelerinin incelenmesinde kullanılmıştır [8]. DTM kullanılarak titreşim analizlerinin yapıldığı çalışmalar mevcuttur [9],[10]. DTM, yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü için başarı ile uygulanabilmektedir.

## II. AMAÇ VE KAPSAM

Her iki ucundan sabit mesnetli olarak mesnetlendirilmiş ve davranışı Bernoulli-Euler Kiriş Teorisine uyan kirişin serbest titreşimine ait dördüncü mertebeden homojen diferansiyel denkleminin DTM kullanılarak çözümü ve ilk üç moda ait açılal frekanslarının hesabı amaçlanmıştır. Bu amaca yönelik olarak kirişin başlangıç ve sınır koşulları kullanılarak kirişin frekans denklemleri DTM ile elde edilmiştir.

## III. BASİT MESNETLİ KİRİŞİN SERBEST TİTREŞİM DENKLEMİ

Kiriş davranışında sadece eğilme tesirlerinin dikkate alındığı teori Bernoulli-Euler Kiriş Teorisi olarak bilinmektedir. Bernoulli Euler Kiriş Teorisine uyan her iki ucu basit mesnetli kiriş ve bu kirişten çıkartılan dx uzunluklu parçada oluşan iç tesirler, (Şekil-1,a,b)'de sunulmuştur.



Şekil-1,a:Bernoulli-Euler kirişi; b:iç kuvvetler

Bernoulli-Euler kirişinin serbest titreşimine ait diferansiyel denklemin aşağıdaki gibi olduğu bilinmektedir [1], [2]:

$$\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{m}{EI} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Burada, EI kirişin eğilme rijitliğini, m kirişin yayılı kütlelerini,  $y(x,t)$  elastik eğri fonksiyonunu, x konum değişkenini, t zaman değişkenini tanımlamaktadır.

L, kiriş uzunluğunu göstermek üzere,  $z=x/L$  boyutsuz konum fonksiyonuna göre (1) numaralı denklem aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{\partial^4 y(z,t)}{\partial z^4} \frac{1}{L^4} + \frac{m}{EI} \frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

Boyutsuz yerdeğiştirme fonksiyonu  $y(z,t)$ , değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$y(z,t) = \phi(z) \cdot \sin(\omega t + \theta) \quad (3)$$

Burada  $\omega$  açısal frekansı,  $\theta$  faz açısını göstermektedir.

Boyutsuz yerdeğiştirme fonksiyonu (3), (2) numaralı denklemde yerine yazılır ise, Bernoulli-Euler kirişinin boyutsuz z değişkenine göre serbest titreşimine ait dördüncü mertebeden homojen diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\phi(z)^{IV}}{L^4} - \frac{m\omega^2}{EI} \phi(z) = 0 \quad (4)$$

Burada,  $\phi(z)^{IV} = \frac{d^4 \phi(z)}{dz^4}$  göstermektedir.

#### IV. DİFERANSİYEL TRANSFER METODU

DTM, Zhou tarafından elektrik devrelerine uygulanması ile ortaya atılmıştır [8]. Metot adı ve kısmi türevli, diferansiyel denklemlerin başlangıç koşulları altındaki çözümlerinde kullanılmaktadır.

Yöntemde,  $\Phi(z)$ , tanımlanan bir D bölgesinde analitik fonksiyon olsun.  $\Phi(z)$  fonksiyonunun  $\forall z \in D$  için Taylor serisi açılımı aşağıdaki şekilde tanımlıdır [11]:

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_i)^k}{k!} \left( \frac{d^k \phi(z)}{dz^k} \right)_{z=z_i} \quad (5)$$

$z_i = 0$  olarak seçilmesi durumunda bu seri açılım Maclaurin serisi olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z)^k}{k!} \left( \frac{d^k \phi(z)}{dz^k} \right)_{z=0} \quad (6)$$

Buradan,  $\phi(z)$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü ise,  $\forall k \in K$  için aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\Phi(k) = T[\phi(z)] = \frac{H^k}{k!} \left( \frac{d^k \phi(z)}{dz^k} \right)_{z=0} \quad (7)$$

Burada; K bölgesi negatif olmayan tamsayıların kümesi;  $\Phi(k)$ , K bölgesinde  $\phi(z)$  nin spektrumu veya dönüştürülmüş fonksiyonu; k dönüşüm parametresi; H diferansiyel dönüşüm yönteminin değişim aralığı olarak tanımlanmıştır.

Taylor seri açılımından, diferansiyel dönüşümün ters dönüşümü aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z}{H} \right)^k \Phi(k) \quad (8)$$

(8) denklemi mühendislik problemine uygulandığında,  $\phi(z)$  fonksiyonunun sonlu Taylor serisi terimi ve kalan teriminin toplamı olarak da aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^N \left( \frac{z}{H} \right)^k \Phi(k) + R_{N+1}(z) \quad (9)$$

DTM kullanarak, bir diferansiyel denklem K bölgesinde cebirsel sıralı denklemlere dönüştürülür.  $\phi(z)$  bilinmeyen fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü  $\Phi(k)$  sıralı denklemlerin çözümleri ile elde edilir ve buradan denklem (8) ve (9) kullanılarak  $\Phi(k)$  nin ters dönüşümünden  $\phi(z)$  bilinmeyen fonksiyonu elde edilir.

DTM de çözüm fonksiyonlarının kapalı formları yerine polinom fonksiyonlarının alınması yüksek mertebeden türevlerinin hesaplanması daha kolay olması yönünden diğer yöntemlerden daha yaygın kullanım alanına sahip olduğu söylenebilir.

Temel matematiksel işlemlerin diferansiyel dönüşüm yönteminin uygulanması ile elde edilen formlardan bazıları Çizelge-1’de sunulmuştur [11].

Çizelge-1: Temel matematiksel işlemlerin diferansiyel dönüşümü.

Orijinal fonksiyon $\phi(z)$	Diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $\Phi(k)$
$a = \text{sbt}, a\phi(z)$	$a = \text{sbt}, a\Phi(k)$
$\phi(z) \pm \varphi(z)$	$\Phi(k) \pm \Psi(k)$
$\frac{d\phi(z)}{dz}$	$(k+1)\Phi(k+1)$
$\frac{d^2 \phi(z)}{dz^2}$	$(k+1)(k+2)\Phi(k+2)$
$\frac{d^3 \phi(z)}{dz^3}$	$(k+1)(k+2)(k+3)\Phi(k+3)$
$\frac{d^4 \phi(z)}{dz^4}$	$(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\Phi(k+4)$

#### V. KİRİŞİN SERBEST TİTREŞİM DENKLEMİNE DTM UYGULANMASI

Bernoulli-Euler kirişinin (4) numaralı serbest titreşimine ait diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

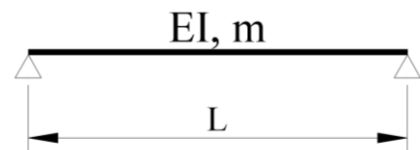
$$\Phi^{IV}(z) + D\Phi(z) = 0 \quad (10)$$

Burada,  $D = \frac{m\omega^2 L^4}{EI}$  göstermektedir.

(10) numaralı denklemin diferansiyel dönüşümü, Çizelge-1’e göre aşağıdaki gibi yazılır.

$$(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\Phi(k+4) = -D\Phi(k) \quad (11)$$

Her iki ucu sabit mesnetli olan Bernoulli-Euler kirişinin (Şekil-2) başlangıç ve sınır koşulları aşağıda sunulmuştur.



Şekil-2: Her iki ucu sabit mesnetlendirilmiş kiriş.

1 inci başlangıç koşulu,  $z=0$  noktasında yerdeğiştirme yoktur:

$$\phi(z = 0) = 0 \quad (12)$$

1 inci sınır koşulu,  $z=1$  noktasında yerdeğiştirme yoktur:

$$\phi(z = 1) = 0 \quad (13)$$

2 inci başlangıç koşulu,  $z=0$  noktası eğilme momenti taşımaz:

$$\frac{d^2\phi(z=0)}{dz^2} = 0 \quad (14)$$

2 inci sınır koşulu  $z=1$  noktası eğilme momenti taşımaz:

$$\frac{d^2\phi(z=1)}{dz^2} = 0 \quad (15)$$

Her iki ucu sabit mesnetli kirişin (11) numaralı diferansiyel dönüşümü bağıntısı ve (12) numaralı sınır koşulları dikkate alınır ise, her  $k$  değeri için diferansiyel dönüşüm fonksiyonları aşağıdaki gibi yazılır.

(12) numaralı başlangıç koşulu kullanılarak,  $\Phi(0)=0$ ; (14) numaralı başlangıç koşulu kullanılarak,  $\Phi(2)=0$  olarak hesaplanır. (13) ve (15) numaralı sınır koşulları kullanılarak sırasıyla  $\Phi(1)$  ve  $\Phi(3)$  için aşağıdaki kabuller yapılabilir:

$$\Phi(1)=a \quad \Phi(3)=b \quad (16)$$

$\Phi(0)=0$ ,  $\Phi(2)=0$  ve (16) numaralı kabuller kullanılarak  $k=0,1,2,3,4,5,\dots$  için  $\Phi(k)$  değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$k=0 \quad \Phi(4)=0 \quad (17)$$

$$k=1 \quad \Phi(5)=-Da/5! \quad (18)$$

$$k=2 \quad \Phi(6)=0 \quad (19)$$

$$k=3 \quad \Phi(7)=-3!Db/7! \quad (20)$$

$$k=4 \quad \Phi(8)=0 \quad (21)$$

$$k=5 \quad \Phi(9)=D^2a/9! \quad (22)$$

$$k=6 \quad \Phi(10)=0 \quad (23)$$

$$k=7 \quad \Phi(11)=3!D^2b/11! \quad (24)$$

$$k=8 \quad \Phi(12)=0 \quad (25)$$

$$k=9 \quad \Phi(13)=-D^3a/13! \quad (26)$$

$$k=10 \quad \Phi(14)=0 \quad (27)$$

$$k=11 \quad \Phi(15)=-3!D^3b/15! \quad (28)$$

(17) - (28) numaralı  $\Phi(k)$  terimleri genelleştirilerek, (12) ve (14) numaralı koşullarda yerine yazılır ise sırasıyla aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$\left[ \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1} D^{k-1}}{(4k-3)!} \right] a + 3! \left[ \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1} D^{k-1}}{(4k-1)!} \right] b = 0 \quad (29)$$

$$\left[ \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k D^k}{(4k-1)!} \right] a + 3! \left[ \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1} D^{k-1}}{(4k-3)!} \right] b = 0 \quad (30)$$

(29) ve (30) numaralı denklemler matris formda aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1} D^{k-1}}{(4k-3)!} & 3! \left[ \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1} D^{k-1}}{(4k-1)!} \right] \\ \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k D^k}{(4k-1)!} & 3! \left[ \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1} D^{k-1}}{(4k-3)!} \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Burada  $N$ , terim sayısını göstermektedir.

(31) numaralı denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümleri için katsayılar matrislerinin determinant değerinin 0'a özdeş alınması gerekmektedir.

(31) numaralı denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinant değeri her iki ucu basit mesnetli kirişin serbest titreşimine ait frekans denklemi  $f(\omega)$  olup aşağıdaki gibi yazılır:

$$f(\omega) = A_{11}.A_{22} - A_{12}.A_{21} = 0 \quad (32)$$

Burada,

$$A_{11} = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1} D^{k-1}}{(4k-3)!}$$

$$A_{12} = 3! \left[ \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1} D^{k-1}}{(4k-1)!} \right]$$

$$A_{21} = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k D^k}{(4k-1)!}$$

$$A_{22} = 3! \left[ \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1} D^{k-1}}{(4k-3)!} \right]$$

göstermektedir.

*Frekans denkleminin çözümü:*

(32) numaralı frekans denkleminin çözümü için bilgisayar algoritması hazırlanmıştır. Frekans denkleminin kökleri, modlara ait açısız frekans değerlerini vermektedir.

## VI. TİTREŞİM DENKLEMİNİN ANALİTİK YÖNTEM KULLANILARAK ÇÖZÜMÜ

Her iki ucu basit mesnetli kirişin, yayılı kütleli, sabit en kesitli Bernoulli-Euler kirişinin serbest titreşimine ait (10) numaralı diferansiyel denkleminin çözümü aşağıdaki gibidir [1],[2].

$$\phi(z) = \sin(\beta z) C_1 + \cos(\beta z) C_2 + \sinh(\beta z) C_3 + \cosh(\beta z) C_4 \quad (33)$$

## VII. SAYISAL UYGULAMA

Burada  $\beta = \sqrt[4]{D}$ ,  $C_1, \dots, C_4$  integral sabitlerini göstermektedir.

(12) numaralı başlangıç koşulu kullanılır ise aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$C_2 + C_4 = 0 \quad (34)$$

(13) numaralı sınır koşulu kullanılır ise aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$-\beta^2 C_2 + \beta^2 C_4 = 0 \quad (35)$$

(14) numaralı başlangıç koşulu kullanılır ise aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\sin(\beta)C_1 + \cos(\beta)C_2 + \sinh(\beta)C_3 + \cosh(\beta)C_4 = 0 \quad (36)$$

(15) numaralı sınır koşulu kullanılır ise aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$-\beta^2 \sin(\beta)C_1 - \beta^2 \cos(\beta)C_2 + \beta^2 \sinh(\beta)C_3 + \beta^2 \cosh(\beta)C_4 = 0 \quad (37)$$

(34)-(37) arasındaki bağıntılar matris formda aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta^2 & 0 & \beta^2 \\ \sin\beta & \cos\beta & \sinh\beta & \cosh\beta \\ -\beta^2 \sin\beta & -\beta^2 \cos\beta & \beta^2 \sinh\beta & \beta^2 \cosh\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = 0 \quad (38)$$

(38) numaralı denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinant değeri her iki ucu basit mesnetli kirişin serbest titreşimine ait frekans denklemi  $f(\beta)$  olup aşağıdaki gibi yazılır:

$$f(\beta) = -2\beta^4 \sin(\beta) \sinh(\beta) = 0 \quad (39)$$

(39) numaralı denklemin kökleri ( $\beta_i$ ) kullanılarak her iki ucu basit mesnetli kirişin açısal frekansları,  $\omega_i = [\beta_i^4 EI / mL^4]^{0.25}$  ile hesaplanır.

Her iki ucu basit mesnetli kirişin ilk üç moduna ait açısal frekansları aşağıdaki gibidir [1],[2].

1 inci moda ait açısal frekans değeri:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (39)$$

2 inci moda ait açısal frekans değeri:

$$\omega_2 = \frac{4\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (39)$$

3 üncü moda ait açısal frekans değeri:

$$\omega_3 = \frac{9\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (39)$$

Eğilme rijitliği  $EI=4000 \text{ tm}^2$ , yayılı kütlesi  $m=0.1 \text{ ts}^2/\text{m}^2$  olan Bernoulli-Euler kirişinin  $L=3\text{m}$ ,  $7 \text{ m}$  ve  $10\text{m}$  göre açısal frekansları DTM ve analitik yöntem kullanılarak hesaplanmıştır.

DTM ve analitik yöntem kullanılarak Bernoulli-Euler kirişinin ilk üç modu için hesaplanan açısal frekansları Çizelge-1'de sunulmuştur.

Çizelge-1: Terim sayısı (N) ve kiriş açıklığına göre DTM ve analitik yöntem kullanılarak hesaplanan açısal frekans değerleri (rad/sn).

L(m)	Açısal frekans rad/sn	TERİM SAYISI (N)		
		DTM		
		5	6	8
3	$\omega_1$	219,404	219,404	219,404
	$\omega_2$	877,232	877,232	877,232
	$\omega_3$	1646,14	1932,092	1973,761
7	$\omega_1$	40,299	40,299	40,299
	$\omega_2$	161,200	161,200	161,200
	$\omega_3$	302,309	354,912	362,513
10	$\omega_1$	19,800	19,800	19,800
	$\omega_2$	78,999	78,999	78,999
	$\omega_3$	148,199	173,901	177,601

Çizelge-1:devam

L(m)	Açısal frekans rad/sn	TERİM SAYISI (N)		
		DTM		
		10	13	14
3	$\omega_1$	219,404	219,404	219,404
	$\omega_2$	877,232	877,232	877,232
	$\omega_3$	1973,761	1973,761	1973,761
7	$\omega_1$	40,299	40,299	40,299
	$\omega_2$	161,200	161,200	161,200
	$\omega_3$	362,513	362,513	362,513
10	$\omega_1$	19,800	19,800	19,800
	$\omega_2$	78,999	78,999	78,999
	$\omega_3$	177,601	177,601	177,601

Çizelge-1:devam

L(m)	Açısal frekans rad/sn	TERİM SAYISI	ANALİTİK YÖNTEM rad/sn
		15	
3	$\omega_1$	219,404	219,324
	$\omega_2$	877,232	877,298
	$\omega_3$	1973,761	1973,920
7	$\omega_1$	40,299	40,284
	$\omega_2$	161,200	161,136
	$\omega_3$	362,513	362,557
10	$\omega_1$	19,800	19,739
	$\omega_2$	78,999	78,957
	$\omega_3$	177,601	177,653

### VIII .TARTIŞMA

DTM, her iki ucu basit mesnetlendirilmiş Bernoulli-Euler kirişinin serbest titreşimine ait dördüncü mertebeden homojen diferansiyel denkleme başarı ile uygulanabilmektedir. Metod, benzer mühendislik problemlerine de uygulanabilir.

### IX. SONUÇ

DTM kullanılarak her iki ucu basit mesnetlendirilmiş Bernoulli-Euler kirişinin ilk üç moduna ait frekansları, metotta kullanılan terim sayısı arttıkça, kiriş uzunluğundan bağımsız olarak analitik yöntem kullanılarak hesaplanan açısal frekans değerlerine yakınsamaktadır. Çizelge-1'deki sayısal sonuçlardan görüldüğü gibi, terim sayısı azaldıkça 3 üncü moda ait açısal frekans değerleri analitik yöntem kullanılarak hesaplanan açısal frekans değerlerinden uzaklaşmaktadır. DTM kullanılarak elde edilecek yüksek modlara ait açısal frekansların hesabında, terim sayısının artırılması çözümün hassasiyetini arttıracaktır.

Çizelge-1'de görüldüğü gibi, her iki ucu sabit mesnetlendirilmiş, yayılı kütlesi sabit olan Bernoulli-Euler kirişinin, L uzunluğu arttıkça, tüm modlara ait açısal frekans değerleri azalmaktadır.

### KAYNAKLAR

- [1] A.Chopra, "Dynamics of Structures", Prentice Hall, Second Edition, USA, 2004.
- [2] R.W.Clough, J. Penzien, "Dynamics of Structures", McGraw-Hill, Inc., Second Edition, Singapore, 1993.
- [3] Z. Celep, N. Kumbasar "Yapı Dinamiği", Beta Dağıtım, İstanbul, 2001.
- [4] H.H. Çatal, "Free vibration of partially supported piles with the effects of bending moment, axial and shear forces", *Engineering Structures*, 24, pp. 1615-1622, 2002.
- [5] H.H. Çatal, "Free vibration of semi-rigid connected and partially embedded piles with the effects of bending moment, axial and shear force", *Engineering Structures*, 28, pp.1911-1918, 2006.
- [6] Y.Yeşilce, H.H. Çatal, "Solution of free vibration equations of semi-rigid connected Reddy-Bickford beams resting on elastic soil using

- differential transform method", *Arch. Appl. Mechanics*, 81, pp. 199-213, 2011.
- [7] Y. Yeşilce, S. Çatal, "Free vibration of axially loaded Reddy-Bickford beam on elastic soil using the differential transform method", *Structural Engineering Mechanics*, 31 (4), pp. 453-475, 2009. ,
- [8] J.K. Zhou, "Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits", Whuan China: Huazhong University Press, 1986.
- [9] B. Bozyiğit, Y.Yeşilce, S. Çatal, "Free vibration of axial-loaded beams resting on viscoelastic foundation using Adomian decomposition method and differential transform method", *Engineering Science and Technology an International Journal*, 21(6), pp. 1181-1193, 2018.
- [10] Ö.Özdemir, M.O. Kaya, "Flap wise bending vibration analysis of rotating tapered cantilever Bernoulli-Euler beam by differential transform method", *J. Sound Vibration*, 289, pp. 413-420, 2006.
- [11] S. Çatal, "Analysis of free vibration of beam on elastic soil using differential transform method", *Structural Engineering and Mechanics*, 24(1), pp.51-62, 2006.