

ANKASTRE MESNETLİ TIMOSHENKO KİRİŞİNİN DİFERANSİYEL TRANSFORMASYON YÖNTEMİYLE SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Seval Çatal

Dokuz Eylül Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İzmir, Turkey

*Corresponding author: seval.catal@deu.edu.tr

Speaker: seval.catal@eu.edu.tr

Presentation/Paper Type: Oral / Full Paper

Özet – Eğilme tesirleriyle birlikte kesme tesirlerinin de dikkate alındığı teori, literatürde Timoshenko kiriş teorisi olarak bilinmektedir. Bu teoriye uygun davranan kirişlerin serbest titreşim analizi mühendisliğin ilgi çeken konuların birisi olmuştur. Timoshenko kiriş teorisine uyan çubukların serbest titreşimine ait kısmi diferansiyel denklemi dördüncü mertebeden olup bu denklemin analitik çözümü mevcuttur. Bir ucu ankastre olarak mesnetlendirilmiş, diğer ucu serbest kirişin serbest titreşimine ait kısmi diferansiyel denklemi, kirişin başlangıç ve sınır koşulları kullanılarak elde edilebilir. İteratif bir çözüm yöntemi olan Diferansiyel Transformasyon metodu (DTM) kullanılarak Timoshenko kirişinin serbest titreşimine ait açısız frekansları hesaplanabilmektedir. Kirişin başlangıç, sınır koşulları ve DTM uygulanarak ilk üç moda ait serbest titreşim açısız frekans değerleri ile diferansiyel denklemin analitik olarak çözülmesiyle elde edilen açısız frekans değerleri karşılaştırılmış, DTM’da kullanılan terim sayısı arttıkça elde edilen sayısal sonuçları analitik çözüm yöntemi kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlara yakınsadığı belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler – Timoshenko Kiriş Teorisi, Diferansiyel Transformasyon Metodu, Açısız Frekans, Ankastre Mesnetli Kiriş, Serbest Titreşim

I. GİRİŞ

Kirişlerin eğilme tesirleri ile birlikte kesme tesirlerinin de dikkate alınması halinde Timoshenko kiriş teorisi geçerli olur. Kirişlerin serbest titreşimine ait değişkenleri, zorlanmış kiriş titreşimlerinde kullanılmaktadır. Kirişlerin serbest titreşime ait yakın geçmişte araştırma gerçekleştirilmiştir. [1],[2],[3]. Bu çalışmalarda, değişik mesnetli kirişlerin serbest titreşimine ait açısız frekans ve periyotları analitik olarak hesaplanmıştır. Elastik zemine oturan, elastik zemine kısmi gömülü kazıkların serbest titreşimine ait açısız frekanslar analitik yöntemle elde edilmiştir [4],[5]. Yüksek mertebeden kesme tesirlerinin dikkate alındığı Reddy-Bickford Kiriş Teorisine veya Timoshenko Kiriş Teorisine uygun davranan kirişlerin serbest titreşimine ait çalışmalar mevcuttur [6],[7].

Zhou, diferansiyel Transformasyon Metodu (DTM), ilk defa elektrik devrelerinin incelenmesinde kullanmıştır [8]. DTM kullanılarak titreşim analizlerinin yapıldığı çalışmalar mevcuttur [9],[10]. Çatal, elastik zemin üzerine oturan Timoshenko kirişinin serbest titreşimine ait açısız frekanslarını DTM kullanılarak hesaplamıştır [11]. DTM, yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü için başarı ile uygulanabilmektedir.

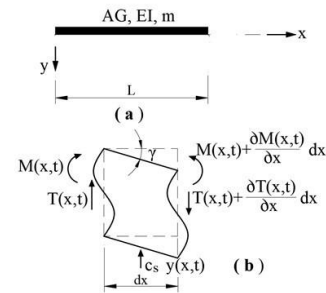
II. AMAÇ VE KAPSAM

Bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest ve davranışı Timoshenko Kiriş Teorisine uyan kirişin serbest titreşimine ait dördüncü mertebeden homojen diferansiyel denkleminin DTM kullanılarak çözümü ve ilk üç moda ait açısız frekanslarının hesabı amaçlanmıştır. Bu amaca yönelik olarak kirişin başlangıç ve sınır koşulları kullanılarak kirişin frekans denklemi DTM ile elde edilmiştir, bu yöntem kullanılarak hesaplanan açısız frekans değerleri analitik yöntem

kullanılarak elde edilen açısız frekans değerleriyle kıyaslanmıştır.

III. ANKASTRE MESNETLİ KİRİŞİN SERBEST TİTREŞİM DENKLEMİ

Timoshenko Kiriş Teorisine uyan kiriş ve bu kirişten çıkartılan dx uzunluklu parçada oluşan iç tesirler, (Şekil-1,a,b)’de sunulmuştur.



Şekil-1,a:Timoshenko kirişi; b: iç kuvvetler

Timoshenko kirişinin serbest titreşimine ait diferansiyel denklemin aşağıdaki gibi olduğu bilinmektedir [3],[4],[5],[11]:

$$\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} - \frac{mk_s}{AG} \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{m}{EI} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Burada, EI kirişin eğilme rijitliğini, AG kayma rijitliğini, m kirişin yayılı kütlelerini, $y(x,t)$ elastik eğri fonksiyonunu, k_s nümerik çarpanı, x konum değişkenini, t zaman değişkenini tanımlamaktadır.

L, kiriş uzunluğunu göstermek üzere, $z=x/L$ boyutsuz konum fonksiyonuna göre (1) numaralı denklem aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{\partial^4 y(z,t)}{\partial z^4} - \frac{1}{L^4} - \frac{mk_s}{AGL^2} \frac{\partial^4 y(z,t)}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{m}{EI} \frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

Boyutsuz yerdeğiştirme fonksiyonu $y(z,t)$, değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$y(z,t) = \phi(z) \cdot \sin(\omega t + \theta) \quad (3)$$

Burada ω açısal frekansı, θ faz açısını göstermektedir.

Boyutsuz yerdeğiştirme fonksiyonu (3), (2) numaralı denklemde yerine yazılır ise, Timoshenko kirişinin boyutsuz z değişkenine göre serbest titreşimine ait dördüncü mertebeden homojen diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\phi(z)^{IV}}{L^4} + \frac{mk_s \omega^2}{AGL^2} \phi(z)^{II} - \frac{m\omega^2}{EI} \phi(z) = 0 \quad (4)$$

Burada, $\phi(z)^{IV} = \frac{d^4 \phi(z)}{dz^4}$; $\phi(z)^{II} = \frac{d^2 \phi(z)}{dz^2}$ göstermektedir.

IV. DİFERANSİYEL TRANSFER METODU

DTM, Zhou tarafından elektrik devrelerine uygulanması ile ortaya atılmıştır [8]. Metot adı ve kısmi türevli, diferansiyel denklemlerin başlangıç koşulları altındaki çözümlerinde kullanılmaktadır.

Yöntemde, $\Phi(z)$, tanımlanan bir D bölgesinde analitik fonksiyon olsun. $\Phi(z)$ fonksiyonunun $\forall z \in D$ için Taylor serisi açılımı aşağıdaki şekilde tanımlıdır [11]:

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_i)^k}{k!} \left(\frac{d^k \phi(z)}{dz^k} \right)_{z=z_i} \quad (5)$$

$z_i = 0$ olarak seçilmesi durumunda bu seri açılım

Maclaurin serisi olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z)^k}{k!} \left(\frac{d^k \phi(z)}{dz^k} \right)_{z=0} \quad (6)$$

Buradan, $\phi(z)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü ise, $\forall k \in K$ için aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\Phi(k) = T[\phi(z)] = \frac{H^k}{k!} \left(\frac{d^k \phi(z)}{dz^k} \right)_{z=0} \quad (7)$$

Burada; K bölgesi negatif olmayan tamsayıların kümesi; $\Phi(k)$, K bölgesinde $\phi(z)$ nin spektrumu veya dönüştürülmüş fonksiyonu; k dönüşüm parametresi; H diferansiyel dönüşüm yönteminin değişim aralığı olarak tanımlanmıştır.

Taylor seri açılımından, diferansiyel dönüşümün ters dönüşümü aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{H} \right)^k \Phi(k) \quad (8)$$

(8) denklemi mühendislik problemine uygulandığında, $\phi(z)$ fonksiyonunun sonlu Taylor serisi terimi ve kalan teriminin toplamı olarak da aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^N \left(\frac{z}{H} \right)^k \Phi(k) + R_{N+1}(z) \quad (9)$$

DTM kullanarak, bir diferansiyel denklem K bölgesinde cebirsel sıralı denklemlere dönüştürülür. $\phi(z)$ bilinmeyen fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü $\Phi(k)$ sıralı denklemlerin çözümleri ile elde edilir ve buradan denklem (8) ve (9) kullanılarak $\Phi(k)$ nin ters dönüşümünden $\phi(z)$ bilinmeyen fonksiyonu elde edilir.

DTM de çözüm fonksiyonlarının kapalı formları yerine polinom fonksiyonlarının alınması yüksek mertebeden türevlerinin hesaplanması daha kolay olması yönünden diğer yöntemlerden daha yaygın kullanım alanına sahip olduğu söylenebilir.

Temel matematiksel işlemlerin diferansiyel dönüşüm yönteminin uygulanması ile elde edilen formlardan bazıları Çizelge-1'de sunulmuştur [11].

Çizelge-1: Temel matematiksel işlemlerin diferansiyel dönüşümü.

Orijinal fonksiyon $\phi(z)$	Diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $\Phi(k)$
$a = sbt, a\phi(z)$	$a = sbt, a\Phi(k)$
$\phi(z) \pm \varphi(z)$	$\Phi(k) \pm \Psi(k)$
$\frac{d\phi(z)}{dz}$	$(k+1)\Phi(k+1)$
$\frac{d^2 \phi(z)}{dz^2}$	$(k+1)(k+2)\Phi(k+2)$
$\frac{d^3 \phi(z)}{dz^3}$	$(k+1)(k+2)(k+3)\Phi(k+3)$
$\frac{d^4 \phi(z)}{dz^4}$	$(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\Phi(k+4)$

V. KİRİŞİN SERBEST TİTREŞİM DENKLEMİNE DTM UYGULANMASI

Timoshenko kirişinin (4) numaralı serbest titreşimine ait diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

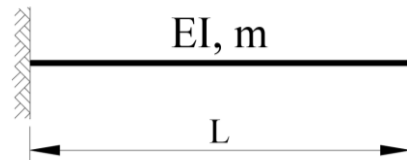
$$\Phi^{IV}(z) + C\Phi^{II}(z) + D\Phi(z) = 0 \quad (10)$$

Burada, $C = \frac{m}{AG} \omega^2 k_s L^2$; $D = \frac{m\omega^2 L^4}{EI}$ göstermektedir.

(10) numaralı denklemin diferansiyel dönüşümü, Çizelge-1'e göre aşağıdaki gibi yazılır.

$$(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\Phi(k+4) = -D\Phi(k) \quad (11)$$

Bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest olan Timoshenko kirişinin (Şekil-2) başlangıç ve sınır koşulları aşağıda sunulmuştur.



Şekil-2: Bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest kiriş.

1 inci başlangıç koşulu, z=0 noktasında yerdeğiştirme yoktur:

$$\phi(z = 0) = 0 \quad (12)$$

1 inci sınır koşulu, z=1 noktasında kesme kuvveti yoktur:

$$\frac{d^3\phi(z=1)}{dz^3} = 0 \quad (13)$$

2 inci başlangıç koşulu, z=0 noktası kesit dönmesi yoktur:

$$\frac{d\phi(z=0)}{dz} = 0 \quad (14)$$

2 inci sınır koşulu z=1 noktası eğilme momenti taşımaz:

$$\frac{d^2\phi(z=1)}{dz^2} = 0 \quad (15)$$

Bir ucu ankastre mesnetli , diğer ucu serbest kirişin (11) numaralı diferansiyel dönüşümü bağıntısı ve (12) numaralı sınır koşulları dikkate alınır ise, her k değeri için diferansiyel dönüşüm fonksiyonları aşağıdaki gibi yazılır.

(12) numaralı başlangıç koşulu kullanılarak, $\Phi(0)=0$; (14) numaralı başlangıç koşulu kullanılarak, $\Phi(1)=0$ olarak hesaplanır. (13) ve (15) numaralı sınır koşulları kullanılarak sırasıyla $\Phi(2)$ ve $\Phi(3)$ için aşağıdaki kabuller yapılabilir:

$$\Phi(2)=a \quad \Phi(3)=b \quad (16)$$

$\Phi(0)=0$, $\Phi(1)=0$ ve (16) numaralı kabuller kullanılarak $k=0,1,2,3,4,5,.....$ için $\Phi(k)$ değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$k=0 \quad \Phi(4)=-2!aC/4! \quad (17)$$

$$k=1 \quad \Phi(5)=-3!Cb/5! \quad (18)$$

$$k=2 \quad \Phi(6)=2!a(C^2-D)/6! \quad (19)$$

$$k=3 \quad \Phi(7)=[3!b[C^2-D)+CDa]/7! \quad (20)$$

$$k=4 \quad \Phi(8)=2!a(-C^3+2CD)/8! \quad (21)$$

$$k=5 \quad \Phi(9)=3!b(-C^3+2CD)/9! \quad (22)$$

$$k=6 \quad \Phi(10)=2!a(C^2-3C^2D+D^2)/10! \quad (23)$$

$$k=7 \quad \Phi(11)=3!b(C^4-3C^2D+D^2)/11! \quad (24)$$

$$k=8 \quad \Phi(12)=2!a(-C^5+4C^3D-3CD^2)/12! \quad (25)$$

$$k=9 \quad \Phi(13)=3!b(-C^5+4C^3D-3CD^2)/13! \quad (26)$$

$$k=10 \quad \Phi(14)=2!a(C^6-5C^4D+6C^2D^2-D^3)/14! \quad (27)$$

$$k=11 \quad \Phi(15)=3!b(C^6-5C^4D+6C^2D^2-D^3)/15! \quad (28)$$

(17) - (28) numaralı $\Phi(k)$ terimleri , (15) ve (13) numaralı koşullarda yerine yazılır ise sırasıyla aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$2!a[1-C/2!+(C^2-D)/4!-(C^3-2CD)/6!+(C^4-3C^2D+D^2)/8!-(C^5-4C^3D+3CD^2)/10!+(C^6-5C^4D+6C^2D^2-D^3)/12!-(C^7-6C^5D+10C^3D^2-4CD^3)/14!+(C^8-7C^6D+15C^4D^2-10C^2D^3+D^4)/16!-(C^9-8C^7D+21C^5D^2-20C^3D^3+5CD^4)/18!+(C^{10}-9C^8D+28C^6D^2-35C^4D^3+15C^2D^4-D^5)/20!-(C^{11}-10C^9D+36C^7D^2-56C^5D^3+35C^3D^4-6CD^5)/22!+.....] + 3!b[1-C/3!+(C^2-D)/5!-(C^3-2CD)/7!+(C^4-3C^2D+D^2)/9!-(C^5-4C^3D+3CD^2)/11!+(C^6-5C^4D+6C^2D^2-D^3)/13!-(C^7-6C^5D+10C^3D^2-4CD^3)/15!+(C^8-7C^6D+15C^4D^2-10C^2D^3+D^4)/17!-(C^9-8C^7D+21C^5D^2-20C^3D^3+5CD^4)/19!+(C^{10}-9C^8D+28C^6D^2-35C^4D^3+15C^2D^4-D^5)/21!-(C^{11}-10C^9D+36C^7D^2-56C^5D^3+35C^3D^4-6CD^5)/23!+.....]=0 \quad (29)$$

$$2!a[-C+(C^2-D)/3!-(C^3-2CD)/5!+(C^4-3C^2D+D^2)/7!-(C^5-4C^3D+3CD^2)/9!+(C^6-5C^4D+6C^2D^2-D^3)/11!-(C^7-6C^5D+10C^3D^2-4CD^3)/13!+(C^8-7C^6D+15C^4D^2-10C^2D^3+D^4)/15!-(C^9-8C^7D+21C^5D^2-20C^3D^3+5CD^4)/17!+(C^{10}-9C^8D+28C^6D^2-35C^4D^3+15C^2D^4-D^5)/19!-(C^{11}-10C^9D+36C^7D^2-56C^5D^3+35C^3D^4-6CD^5)/21!+.....] + 3!b[1-C/2!+(C^2-D)/4!-(C^3-2CD)/6!+(C^4-3C^2D+D^2)/8!-(C^5-4C^3D+3CD^2)/10!+(C^6-5C^4D+6C^2D^2-D^3)/12!-(C^7-6C^5D+10C^3D^2-4CD^3)/14!+(C^8-7C^6D+15C^4D^2-10C^2D^3+D^4)/16!-(C^9-8C^7D+21C^5D^2-20C^3D^3+5CD^4)/18!+(C^{10}-9C^8D+28C^6D^2-35C^4D^3+15C^2D^4-D^5)/20!-(C^{11}-10C^9D+36C^7D^2-56C^5D^3+35C^3D^4-6CD^5)/22!+.....]=0 \quad (30)$$

(29) ve (30) numaralı denklemler matris formda aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2! a \\ 3! b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

(31) numaralı denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümleri için katsayılar matrislerinin determinant değerinin 0'a özdeş alınması gerekmektedir.

(31) numaralı denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinant değeri her iki ucu basit mesnetli kirişin serbest titreşimine ait frekans denklemi $f(\omega)$ olup aşağıdaki gibi yazılır:

$$f(\omega)=A_{11}.A_{22}-A_{12}.A_{21}=0 \quad (32)$$

Burada,

$$A_{11}=1-C/2!+(C^2-D)/4!-(C^3-2CD)/6!+(C^4-3C^2D+D^2)/8!-(C^5-4C^3D+3CD^2)/10!+(C^6-5C^4D+6C^2D^2-D^3)/12!-(C^7-6C^5D+10C^3D^2-4CD^3)/14!+(C^8-7C^6D+15C^4D^2-10C^2D^3+D^4)/16!-(C^9-8C^7D+21C^5D^2-20C^3D^3+5CD^4)/18!+(C^{10}-9C^8D+28C^6D^2-35C^4D^3+15C^2D^4-D^5)/20!-(C^{11}-10C^9D+36C^7D^2-56C^5D^3+35C^3D^4-6CD^5)/22!+.....$$

$$A_{12}=1-C/3!+(C^2-D)/5!-(C^3-2CD)/7!+(C^4-3C^2D+D^2)/9!-(C^5-4C^3D+3CD^2)/11!+(C^6-5C^4D+6C^2D^2-D^3)/13!-(C^7-6C^5D+10C^3D^2-4CD^3)/15!+(C^8-7C^6D+15C^4D^2-10C^2D^3+D^4)/17!-(C^9-8C^7D+21C^5D^2-20C^3D^3+5CD^4)/19!-(C^{10}-9C^8D+28C^6D^2-35C^4D^3+15C^2D^4-D^5)/21!-(C^{11}-10C^9D+36C^7D^2-56C^5D^3+35C^3D^4-6CD^5)/23!+.....$$

$$+D^4)/17! - (C^9-8C^7D+21C^5D^2-20C^3D^3+ 5CD^4)19! + (C^{10}-9C^8D +28C^6D^2-35C^4D^3 +15C^2D^4 -D^5)/21! - (C^{11} - 10C^9D+36C^7D^2-56 C^5D^3+35 C^3D^4- 6CD^5)/23!+ \dots$$

$$A_{21}=[-C+(C^2-D)/3!-(C^3-2CD)/5!+(C^4-3C^2D+D^2)/7!-(C^5-4C^3D+3CD^2)/9!+(C^6-5C^4D+6C^2D^2-D^3)/11!-(C^7-6C^5D+10C^3D^2-4CD^3)/13!+(C^8-7C^6D+15C^4D^2-10C^2D^3+D^4)/15!-(C^9-8C^7D+21C^5D^2-20C^3D^3+5CD^4)/17!+(C^{10}-9C^8D+28C^6D^2-35C^4D^3+15C^2D^4-D^5)/19!-(C^{11}-10C^9D+36C^7D^2-56C^5D^3+35C^3D^4-6CD^5)/21!+\dots]$$

$$A_{22}=1-C/2!+(C^2-D)/4!-(C^3-2CD)/6!+(C^4-3C^2D+D^2)/8!-(C^5-4C^3D+3CD^2)/10!+(C^6-5C^4D+6C^2D^2-D^3)/12!-(C^7-6C^5D+10C^3D^2-4CD^3)/14!+(C^8-7C^6D+15C^4D^2-10C^2D^3+D^4)/16!-(C^9-8C^7D+21C^5D^2-20C^3D^3+5CD^4)/18!+(C^{10}-9C^8D+28C^6D^2-35C^4D^3+15C^2D^4-D^5)/20!-(C^{11}-10C^9D+36C^7D^2-56C^5D^3+35C^3D^4-6CD^5)/22!+\dots$$

göstermektedir.

Frekans denkleminin çözümü:

(32) numaralı frekans denkleminin çözümü için bilgisayar algoritması hazırlanmıştır. Frekans denkleminin kökleri, modlara ait açısal frekans değerlerini vermektedir.

VI. TİTREŞİM DENKLEMİNİN ANALİTİK YÖNTEM KULLANILARAK ÇÖZÜMÜ

Bir ucu ankastre diğer ucu serbest,yayıllı kütleli, sabit en kesitli Timoshenko kirişinin serbest titreşimine ait (10) numaralı diferansiyel denkleminin çözümü β_1 değişkeninin işaretine bağlı olarak aşağıdaki gibidir [4],[5].

$$\beta_1 = \left[\frac{-C+(C^2+4D)^{0.5}}{2} \right]^{0.5} ; \beta_2 = \left[\frac{-C-(C^2+4D)^{0.5}}{2} \right]^{0.5} \text{ olmak üzere}$$

I.Hal: $\beta_1 > 0$ ise, (10) numaralı denklemin çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\phi(z) = \cosh(D_1z) C_1 + \sinh(D_1z) C_2 + \cos(D_2z) C_3 + \sin(D_2z) C_4 \quad (33)$$

Burada $D_1=(\beta_1)^{0.5}$; $D_2=(-\beta_2)^{0.5}$, C_1, \dots, C_4 integral sabitlerini göstermektedir.

II.Hal: $\beta_1 < 0$ ise, (10) numaralı denklemin çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\phi(z) = \cos(D_3z) C_5 + \sin(D_3z) C_6 + \cos(D_2z) C_7 + \sin(D_2z) C_8 \quad (34)$$

Burada $D_3=(-\beta_1)^{0.5}$; C_5, \dots, C_8 integral sabitlerini göstermektedir.

I inci hal için (12) numaralı başlangıç koşulu kullanılır ise aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$C_1 + C_3 = 0 \quad (35)$$

I inci hal için (13) numaralı sınır koşulu kullanılır ise aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$D_1^3 \sinh(D_1) C_1 + D_1^3 \cosh(D_1) C_2 + D_2^3 \sin(D_2) C_3 - D_2^3 \cos(D_2) C_4 = 0 \quad (36)$$

I inci hal için (14) numaralı başlangıç koşulu kullanılır ise aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$D_1 C_2 + D_2 C_4 = 0 \quad (37)$$

I inci hal için (15) numaralı sınır koşulu kullanılır ise aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$D_1^2 \cosh(D_1) C_1 + D_1^2 \sinh(D_1) C_2 - D_2^2 \cos(D_2) C_3 - D_2^2 \sin(D_2) C_4 = 0 \quad (38)$$

(35)-(38) arasındaki bağıntılar matris formda aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ D_1^3 \sinh(D_1) & D_1^3 \cosh(D_1) & D_2^3 \sin(D_2) & D_2^3 \cos(D_2) \\ 0 & D_1 & 0 & D_2 \\ D_1^2 \cosh(D_1) & D_1^2 \sinh(D_1) & -D_2^2 \cos(D_2) & -D_2^2 \sin(D_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (39)$$

(39) numaralı denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinant değeri bir ucu ankastre diğer ucu serbest Timoshenko kirişinin I inci hal için serbest titreşimine ait frekans denklemini elde edilir.

II inci hal için (12) numaralı başlangıç koşulu kullanılır ise aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$C_1 + C_7 = 0 \quad (40)$$

II inci hal için (13) numaralı sınır koşulu kullanılır ise aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$D_3^3 \sin(D_3) C_5 - D_3^3 \cos(D_3) C_6 + D_2^3 \sin(D_2) C_7 - D_2^3 \cos(D_2) C_8 = 0 \quad (41)$$

II inci hal için (14) numaralı başlangıç koşulu kullanılır ise aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$D_3 C_6 + D_2 C_8 = 0 \quad (42)$$

II inci hal için (15) numaralı sınır koşulu kullanılır ise aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$-D_3^2 \cos(D_3) C_5 - D_3^2 \sin(D_3) C_6 - D_2^2 \cos(D_2) C_7 - D_2^2 \sin(D_2) C_8 = 0 \quad (43)$$

(40)-(43) arasındaki bağıntılar matris formda aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ D_3^3 \sin(D_3) & -D_3^3 \cos(D_3) & D_2^3 \sin(D_2) & -D_2^3 \cos(D_2) \\ 0 & D_3 & 0 & D_2 \\ -D_3^2 \cos(D_3) & -D_3^2 \sin(D_3) & -D_2^2 \cos(D_2) & -D_2^2 \sin(D_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (44)$$

(44) numaralı denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinant değeri bir ucu ankastre diğer ucu serbest Timoshenko kirişinin II inci hal için serbest titreşimine ait frekans denklemi elde edilir. Frekans denklemlerinin çözülmesi suretiyle açılmal frekanslar elde edilir.

Kirişin Euler kirişi olması halinde ise, literatürde bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest kirişin ilk üç moduna ait açılmal frekansları aşağıdaki gibidir [1],[2].

1 inci moda ait açılmal frekans değeri:

$$\omega_1 = \frac{3,516}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (45)$$

2 inci moda ait açılmal frekans değeri:

$$\omega_2 = \frac{22,06}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (46)$$

3 üncü moda ait açılmal frekans değeri:

$$\omega_3 = \frac{61,70}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (47)$$

VII. SAYISAL UYGULAMA

Eğilme rijitliği EI=4000 tm², yayılı kütlesi m=0.1 ts²/m², nümerik çarpanı k_s=1,5 olan Timoshenko kirişinin L=3m, 7 m ve 10m göre açılmal frekansları DTM ve analitik yöntem kullanılarak hesaplanmıştır. Kirişin Bernoulli-Euler kiriş teorisine uyması halinde, literatürde verilen (45)-(47) numaralı bağıntılar kullanılarak ilk üç moda ait açılmal frekansları Timoshenko kirişinin açılmal frekanslarıyla kıyaslanması amacıyla hesaplanmıştır.

DTM ve analitik yöntem kullanılarak Timoshenko kirişinin ilk üç modu için hesaplanan açılmal frekansları ile Kirişin Bernoulli-Euler kirişi olması halinde ilk üç moda ait açılmal frekans değerleri Çizelge-1’de sunulmuştur.

Çizelge-1: Terim sayısı (N) ve kiriş açıklığına göre DTM ve analitik yöntem kullanılarak hesaplanan açılmal frekans değerleri (rad/sn).

L(m)	Açılmal frekans (rda/sn)	TERİM SAYISI (N)		
		DTM		
		5	6	8
3	ω ₁	78,499	78,499	78,499
	ω ₂	---	---	464,919
	ω ₃	---	---	872,234

Çizelge-1:devam

L(m)	Açılmal frekans (rad/sn)	TERİM SAYISI (N)		
		DTM		
		10	13	14
3	ω ₁	78,499	78,499	78,499
	ω ₂	464,319	464,319	464,319
	ω ₃	1099,679	1166,062	1165,762

Çizelge-1:devam

L(m)	Açılmal frekans (rad/sn)	TERİM SAYISI	ANALİTİK Timoshenko	ANALİTİK Euler kirişi
		15	(rad/sn)	(rad/sn)
3	ω ₁	78,499	78,499	78,133
	ω ₂	464,319	464,319	489,555
	ω ₃	1165,762	1165,762	1371,111

Çizelge-1:devam

L(m)	Açılmal frekans (rda/sn)	TERİM SAYISI (N)		
		DTM		
		5	6	8
7	ω ₁	14,300	14,300	14,300
	ω ₂	---	---	89,099
	ω ₃	---	---	175,701
10	ω ₁	6,999	6,999	6,999
	ω ₂	---	---	43,799
	ω ₃	---	---	86,499

Çizelge-1:devam

L(m)	Açılmal frekans (rad/sn)	TERİM SAYISI (N)		
		DTM		
		10	13	14
7	ω ₁	14,300	14,300	14,300
	ω ₂	89,099	89,099	89,099
	ω ₃	229,404	243,405	243,406

Çizelge-1:devam

L(m)	Açısal frekans (rad/sn)	TERİM SAYISI (N) DTM		
		10	13	14
10	ω_1	6,999	6,999	6,999
	ω_2	43,799	43,799	43,799
	ω_3	113,798	121,298	121,298

Çizelge-1:devam

L(m)	Açısal frekans (rad/sn)	TERİM SAYISI	ANALİTİK Timoshenko	ANALİTİK Euler kirişi
		15	(rad/sn)	(rad/sn)
7	ω_1	14,300	14,300	14,351
	ω_2	89,099	89,099	89,918
	ω_3	243,406	243,406	251,836
10	ω_1	6,999	6,999	7,032
	ω_2	43,799	43,799	44,060
	ω_3	121,298	121,298	123,400

VIII. TARTIŞMA

DTM, bir ucu ankastre mesnetlendirilmiş diğer ucu serbest kirişinin serbest titreşimine ait dördüncü mertebeden homojen diferansiyel denkleminde başarı ile uygulanabilmektedir. Metod, benzer mühendislik problemlerine de uygulanabilir.

IX. SONUÇ

DTM kullanılarak bir ucu ankastre mesnetlendirilmiş Timoshenko kirişinin ilk üç moduna ait frekansları, metotta kullanılan terim sayısı arttıkça, kiriş uzunluğundan bağımsız olarak analitik yöntem kullanılarak hesaplanan açısal frekans değerlerine yakınsamaktadır. Çizelge-1'deki sayısal sonuçlardan görüldüğü gibi, terim sayısı azaldıkça 3 üncü moda ait açısal frekans değerleri analitik yöntem kullanılarak hesaplanan açısal frekans değerlerinden uzaklaşmaktadır. Terim sayısı 6 ve daha az alındığında 1 inci moddan büyük modlara ait açısal frekansları DTM kullanılarak hesaplanamamaktadır. DTM kullanılarak elde edilecek yüksek modlara ait açısal frekansların hesabında, terim sayısının artırılması çözümün hassasiyetini arttıracaktır.

Çizelge-1'de görüldüğü gibi, bir ucu ankastre mesnetlendirilmiş diğer ucu serbest, yayılı kütlesi sabit olan Timoshenko kirişinin, L uzunluğu arttıkça, tüm modlara ait açısal frekans değerleri azalmaktadır.

Çizelge-1'de görüldüğü gibi, Timoshenko kiriş teorisi dikkate alınarak hesaplanan ilk üç moda ait açısal frekans

değerleri, aynı özelliklere sahip Bernoulli-Euler kirişinin ilk üç moda ait açısal frekans değerlerine göre daha küçüktür.

KAYNAKLAR

- [1] A.Chopra, "Dynamics of Structures", Prentice Hall, Second Edition, USA, 2004.
- [2] R.W.Clough, J. Penzien, "Dynamics of Structures", McGraw-Hill, Inc., Second Edition, Singapore, 1993.
- [3] Z. Celep, N. Kumbasar "Yapı Dinamiği", Beta Dağıtım, İstanbul, 2001.
- [4] H.H. Çatal, "Free vibration of partially supported piles with the effects of bending moment, axial and shear forces", *Engineering Structures*, 24, pp. 1615-1622, 2002.
- [5] H.H. Çatal, "Free vibration of semi-rigid connected and partially embedded piles with the effects of bending moment, axial and shear force", *Engineering Structures*, 28, pp.1911-1918, 2006.
- [6] Y.Yeşilce, H.H. Çatal, "Solution of free vibration equations of semi-rigid connected Reddy-Bickford beams resting on elastic soil using differential transform method", *Arch. Appl. Mechanics*, 81, pp. 199-213, 2011.
- [7] Y. Yeşilce, S. Çatal, "Free vibration of axially loaded Reddy-Bickford beam on elastic soil using the differential transform method", *Structural Engineering Mechanics*, 31 (4), pp. 453-475, 2009.
- [8] J.K. Zhou, "Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits", Whuan China: Huazhong University Press, 1986.
- [9] B. Bozyiğit, Y. Yeşilce, S. Çatal, "Free vibration of axial-loaded beams resting on viscoelastic foundation using Adomian decomposition method and differential transform method", *Engineering Science and Technology an International Journal*, 21(6), pp. 1181-1193, 2018.
- [10] Ö.Özdemir, M.O. Kaya, "Flap wise bending vibration analysis of rotating tapered cantilever Bernoulli-Euler beam by differential transform method", *J. Sound Vibration*, 289, pp. 413-420, 2006.
- [11] S. Çatal, "Analysis of free vibration of beam on elastic soil using differential transform method", *Structural Engineering and Mechanics*, 24(1), pp.51-62, 2006.