SETSCI Conference Proceedings,
4 (1): 326-332, 2019

ISAS 2019
3rd International Symposium on Innovative Approaches in Scientific Studies
Section: Engineering and Natural Sciences
April 19 – 21, 2019, Ankara, Turkey

Ortogonal Koni Metrik Uzaylarda Bazı Ortak Sabit Nokta Teoremleri

Mehmet SÜRMELİOĞLU[1+], Nurcan BİLGİLİ GÜNGÖR [2*]

[1] *Amasya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Amasya, Türkiye*
[2] *Amasya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Amasya, Türkiye*

[*] *Sorumlu Yazar: bilgilinurcan@gmail.com / nurcan.bilgili@amasya.edu.tr*
[+] *Konuşmacı: m.sürmeli_05@hotmail.com*

Sunum Şekli : Tam Metin

Özet – 2017 yılında Gordji, Ramazani, De La Sen ve Cho [1] ortogonal küme ve ortogonal metrik uzay kavramlarını vermişlerdir. Ardından genelleştirilmiş metrik uzaylarda sabit nokta çalışmaları yapılmıştır ([2]). 2018 yılında Bilgili Gungor [3], koni metrik uzaylarda ortogonallik bağıntısını kullanarak büzülme dönüşümleri için sabit noktaların varlığını ispatlamıştır. Bu çalışmada ise Bilgili Gungor [3], Abbas ve Jungck [4] çalışmalarından esinlenerek, ortogonal koni metrik uzaylarda tanımlı öz dönüşümler için uygun büzülme şartları kullanılarak, ortak sabit noktaların varlığı ve tekliği incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler – Ortogonal küme, metrik uzay, koni metrik uzay, büzülme dönüşümleri, sabit nokta, ortak sabit nokta,

I. Giriş

Sabit nokta teoride, uygun büzülme koşullarını sağlayan dönüşümlerin ortak sabit noktalarını bulma konusu yaygın bir yer almaktadır. İlk kez 1976 yılında Jungck [5], Banach Büzülme Prensibini, dönüşümler için ortak sabit nokta teoremine genelleştirmiştir. Bu teoremin pek çok uygulamaları olmuştur. Fakat bu teoremde, verilen dönüşümlerin birinin sürekliliği gereklidir. Bu durumun üstesinden gelmek için 1982 yılında Sessa [6], dönüşümler için zayıf değişmelilik kavramını vermiştir. 1986 yılında Jungck [7] dönüşümler için zayıf değişmelilik kavramını genelleştirmek adına, bağdaşıklık kavramını literatüre kazandırmıştır ve zayıf değişmeli dönüşümlerin bağdaşık olduğunu fakat karşıtının doğru olmadığını ispatlamıştır. 1994 yılında Pant [8], R-zayıf değişmeli dönüşümler kavramını ve bu dönüşümler için, dönüşümlerden en az birinin sürekli olması durumunda bazı ortak sabit nokta teoremlerini vermiştir.

Diğer taraftan Kannan [9], 1968 yılında sabit noktalarında sürekli olmamasına rağmen, tanım uzayında sürekli olmayan bir dönüşüm için sabit noktanın varlığını göstermiştir.

1996 ve 1998 yıllarındaki çalışmalarında Jungck [10,11], çakışım noktalarında değişmeli öz dönüşümler için zayıf bağdaşıklığı tanımlamıştır. Bu kavramlar kullanılarak pek çok araştırmacı, metrik uzaylar üzerinde dönüşümlerin çakışım noktalarıyla ilgili çeşitli sonuçlar vermişlerdir. 2008 yılında Abbas ve Jungck [4], 2007 yılında Huang ve Zhang [12] tarafından tanımlanan koni metrik uzaylarda verilen sabit nokta teoremlerinden esinlenerek, koni metrik uzaylar üzerinde ortak sabit nokta teoremlerinin ifade ve ispatını yapmışlardır.

Öte yandan 2017 yılında Gordji, Ramazani, De La Sen ve Cho [1] ortogonal küme ve ortogonal metrik uzay kavramlarını vermişlerdir. Ardından bu uzaylarda sabit nokta çalışmaları yapılmıştır. 2018 yılında Bilgili Gungor [3], koni metrik uzaylarda ortogonallik bağıntısını kullanarak büzülme dönüşümleri için sabit noktaların varlığını ispatlamıştır. Bu çalışmada ise Bilgili Gungor [3], Abbas ve Jungck [4] çalışmalarından esinlenerek, ortogonal koni metrik uzaylarda tanımlı öz dönüşümler için uygun büzülme şartları kullanılarak, ortak sabit noktaların varlığı ve tekliği incelenmiştir.

II. Materyal ve Metodlar

Tanım 1. ([1]) $X \neq \emptyset$ ve $\perp \subseteq X \times X$ bir ikili bağıntı olsun. Eğer $' \perp '$ bağıntısı

$$\exists x_0 \in X, (\forall y \in X, x_0 \perp y) \vee (\forall y \in X, y \perp x_0) \qquad (1)$$

koşulunu sağlarsa X *ortogonal küme (O-küme)* olarak adlandırılır. $(X, \perp)$ ile gösterilir. Burada x_0 elemanına *ortogonal eleman* denir.

Örnek 1. ([2]) $X = \mathbb{Z}$ olsun. $k \in \mathbb{Z}$ için $m = kn$ oluyorsa, $m \perp n$ olarak tanımlansın. Her $n \in \mathbb{Z}$için $0 \perp n$ olduğu kolayca görülebilir. O halde $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir.

Sıradaki örnekte x_0 ortogonal elemanının tek olmadığını görebiliriz.

Örnek 2. ([2]) $X = [0, \infty)$ olsun. $x.y \in \{x, y\}$ ise $x \perp y$ olarak tanımlansın. O halde $x_0 = 0$ ve $x_0 = 1$ olabilir. $(X, \perp)$ bir ortogonal kümedir.

Tanım 2. ([1]) $(X,\perp)$ bir ortogonal küme olsun. Herhangi iki $x,y \in X$ için $x \perp y$ ise bu elemanlara *ortogonal bağlantılı elemanlar* denir.

Tanım 3. ([1]) Eğer $(X,\perp)$ ortogonal kümesinde bir $\{x_n\}$ dizisi için

$$(\forall n \in \mathbb{N}, x_n \perp x_{n+1}) \vee (\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \perp x_n) \tag{2}$$

oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi *ortogonal dizi (O-dizi)* olarak adlandırılır.

Benzer şekilde, bir $\{x_n\} \subseteq (X,\perp)$ Cauchy dizisi için

$$(\forall n \in \mathbb{N}, x_n \perp x_{n+1}) \vee (\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \perp x_n) \tag{3}$$

oluyorsa *ortogonal Cauchy dizisi (O-Cauchy dizisi)* olarak adlandırılır.

Tanım 4. ([1]) $(X,\perp)$ bir ortogonal küme ve d, X üzerinde bir metrik olsun. O halde $(X,\perp,d)$ *ortogonal metrik uzay (O-metrik uzay* olarak adlandırılır.

Tanım 5. ([12]) E reel Banach uzayı ve $P \subseteq E$ olsun. P'nin *koni* olması için gerek ve yeter şart

(i) $P\ kapalı, P \neq \emptyset\ ve\ P \neq \{\theta_E\}$
(ii) $a,b \in \mathbb{R}, a,b \geq 0, x,y \in P \Rightarrow ax+by \in P$
(iii) $x \in P\ ve\ -x \in P \Rightarrow x = \theta_E$

olmasıdır.

$P \subseteq E$ konisi verilsin. Her $x,y \in E$ için $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow y-x \in P$ olacak şekilde kısmi sıralama tanımlayabiliriz. $x \preccurlyeq y$ fakat $x \neq y$ olduğunu göstermek için $x \prec y$ yazabiliriz.

$y - x \in int\,P$ iken $x \ll y$ yazabiliriz. $int\,P, P$ nin içini ifade eder.

Her $x,y \in E$ için en az bir $K > 0$ sayısı var öyle ki $0 \preccurlyeq x \preccurlyeq y$ iken $\|x\|_E \leq K\|y\|_E$ oluyorsa P koniğine *normal koni* denir.

Bu koşulu sağlayan en küçük $K > 0$ sayısına P normal koniğinin *normal sabiti* denir.

P den alınan üstten sınırlı her artan dizi yakınsak ise P konisine *regüler koni* denir. Eğer $\{x_n\}$ dizisi bazı $y \in E$ için

$$x_1 \preccurlyeq x_2 \preccurlyeq x_3 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq x_n \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq y \tag{4}$$

olacak şekilde bir dizi ise o halde bir $x \in E$ için $\|x_n - x\| \to 0 (n \to \infty)$.

Eşdeğer olarak P konisinin regüler koni olması için gerek ve yeter şart alttan sınırlı her azalan dizinin yakınsak olmasıdır.

İyi bilinir ki her regüler koni bir normal konidir.

Çalışmamızın devamında E bir reel Banach uzayı, P de $int\,P \neq \emptyset$ olacak şekilde E içinde bir koni ve $\preccurlyeq$ bağıntısı da P üzerinde kısmi sıralama bağıntısı olarak kabul edilecektir.

Tanım 6. ([12]) $X \neq \emptyset$ olmak üzere $d: X \times X \to E$ dönüşümü

(d_1) $\forall x,y \in X,\ \theta_E \preccurlyeq d(x,y), d(x,y) = \theta_E \Leftrightarrow x = y$
(d_2) $\forall x,y \in X, d(x,y) = d(y,x)$
(d_3) $\forall x,y,z \in X, d(x,y) \preccurlyeq d(x,z) + d(z,y)$

koşullarını sağlasın. O halde d dönüşümüne X üzerinde bir *koni metrik* ve (X,d) ye de *koni metrik uzay* denir.

Lemma 1. ([13]) (X,d) koni metrik uzay olsun. Her $c \in E$ de $\theta \ll c$ olacak şekilde verilsin. $x \in E\ ve\ \|x\| < \delta$ olduğunda $c - x \in int\,P$ olacak şekilde $\delta > 0$vardır.

Tanım 7. ([3]) $(X,\perp)$ bir ortogonal küme ve d, X üzerinde bir koni metrik olsun. O halde $(X,\perp,d)$ ye *ortogonal koni metrik uzay (O-koni metrik uzay)* denir.

Örnek 3. ([3]) $E = \mathbb{R}^2, P = \{(x,y) \in E : x, y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2\ ve\ X = \mathbb{Z}$ olsun.

$$d: X \times X \to E, d(x,y) = (|x-y|, \alpha|x-y|)$$

dönüşümü $\alpha \geq 0\ ve\ \alpha \in \mathbb{R}$ için tanımlansın. Burada $X = \mathbb{Z}$ üzerindeki $\perp$ ortogonallik bağıntısının Örnek 1 deki gibi tanımlı olduğunu kabul edilirse $(X,\perp,d)$ bir ortogonal koni metrik uzaydır.

Örnek 4. ([3]) $q \geq 1, b \geq 1\ ve\ q,b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$E = \{\{x_n\} : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty}(|x_n|)^q < \infty\}\ ve\ P = \{\{x_n\} \in E : x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Kabul edelim ki $(X,\perp,\rho)$ bir ortogonal metrik uzay olsun. O halde X üzerinde

$$d: X \times X \to E, d(x,y) = \left(\frac{\rho}{b^n}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{5}$$

dönüşümü tanımlanabilir ve bu dönüşüm ortogonal koni metriktir. Yani $(X,\perp,d)$ bir ortogonal koni metrik uzaydır.

Tanım 8. ([3]) $(X,\perp,d)$ ortogonal koni metrik uzay olsun. $x \in X$ olmak üzere $\{x_n\}$, X de ortogonal bir dizi olsun. Eğer $\theta \prec\prec c$ olacak şekildeki her $c \in E$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq N (n \in \mathbb{N})$ için $d(x_n, x) \prec\prec c$ oluyorsa $\{x_n\}$ ortogonal dizisi *yakınsaktır* ve $\{x_n\}$, x e *yakınsar* denir.

Tanım 9. ([3]) $(X,\perp,d)$ ortogonal koni metrik uzay olsun. $x \in X$ olmak üzere $\{x_n\}$, X de ortogonal bir dizi olsun. Eğer $\theta \prec\prec c$ olacak şekildeki her $c \in E$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n,m \geq N (n,m \in \mathbb{N})$ için $d(x_n, x_m) \prec\prec c$ oluyorsa $\{x_n\}$ ortogonal dizisine X de bir *ortogonal Cauchy dizisi* denir.

Tanım 10. ([3]) $(X,\perp,d)$ ortogonal koni metrik uzay olsun. Eğer X deki her ortogonal Cauchy dizisi yakınsak ise bu durumda $(X,\perp,d)$ koni metrik uzayına *ortogonal tam koni metrik uzay* denir.

Lemma 2. ([3]) $(X,\perp,d)$ ortogonal koni metrik uzay olsun. $\{x_n\}$, X de ortogonal bir dizi olsun. $\{x_n\}$ ortogonal dizisi bir $x \in X$ elemanına yakınsıyorsa, bu dizi bir ortogonal Cauchy dizisidir.

Tanım 11. ([3]) $(X,\perp,d)$ ortogonal koni metrik uzay olsun. X deki her $\{x_n\}$ ortogonal dizisinin, X içinde yakınsak olan bir $\{x_{n_i}\}$ ortogonal alt dizisi olsun. Bu durumda $(X,\perp,d)$

ortogonal koni metrik uzayına *dizisel kompakt ortogonal koni metrik uzay* denir.

Tanım 12. ([3]) $(X, \perp, d)$ ortogonal koni metrik uzay, $0 < \lambda < 1$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. $f : X \to X$ dönüşümü için,

$$x \perp y \Rightarrow d(fx, fy) \preccurlyeq \lambda d(x, y) \tag{6}$$

oluyorsa f dönüşümüne λ Lipschitz sabitiyle *ortogonal büzülme* ($\perp -büzülme$) denir.

Tanım 13. ([3]) $(X, \perp, d)$ ortogonal koni metrik uzay olsun. $f : X \to X$ dönüşümü için,

$$x \perp y \Rightarrow fx \perp fy \tag{7}$$

oluyorsa f ye *ortogonalliği koruyan dönüşüm* ($\perp -koruyan$) denir.

Tanım 14. ([3]) $(X, \perp, d)$ ortogonal koni metrik uzay, $x_n \subseteq X$ ortogonal dizi, $f : X \to X$ bir dönüşüm ve $x \in X$ olsun.

$$x_n \to x \Rightarrow fx_n \to fx \tag{8}$$

oluyorsa f ye $x \in X$ *noktasında ortogonal sürekli dönüşüm* ($\perp -sürekli$) denir. Ayrıca f dönüşümü her $x \in X$ noktasında ortogonal sürekli ise, f dönüşümüne *X kümesi üzerinde ortogonal süreklidir*, denir.

Lemma 3. ([4]) (X, d) bir koni metrik uzay olsun. $f, g : X \to X$ zayıf bağdaşık iki dönüşüm olsun. f ve g dönüşümleri X içinde bir tek çakışım noktasına sahipse, bir tek ortak sabit noktaları vardır.

III. Sonuçlar

Tanım 15. $(X, \perp, d)$ bir ortogonal koni metrik uzay ve

$f : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $(x_n) \subseteq X$ dizisi için,

$$\begin{gathered} f(x_n) \perp f(x_{n+1}) \Rightarrow f(x_{n+1}) \perp f(x_{n+2}) \\ ve \\ f(x_{n+1}) \perp f(x_n) \Rightarrow f(x_{n+2}) \perp f(x_{n+1}) \end{gathered} \tag{9}$$

oluyorsa f ye *dizisel ortogonal dönüşüm* denir.

Teorem1. $(X, \perp, d)$ bir ortogonal koni metrik uzay ve P, K normal sabitiyle bir normal koni olsun. $f, g : X \to X$ dönüşümleri ve $(x_n) \subseteq X$ dizisi aşağıdaki şartları sağlasın.

(i) $gx \perp gy$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için,

$$d(fx, fy) \preccurlyeq \lambda d(gx, gy)$$

olacak şekilde en az bir $\lambda \in (0,1)$ vardır.

(ii) f ortogonalliği koruyan, dizisel ortogonal bir dönüşüm olsun.

$(iii) gx_n \to q = gp$ olacak şekilde $p, q \in X$ varken her $n \in \mathbb{N}^+$ için $gx_n \perp q = gp$ dir.

$(iv) fa = ga\ ve\ fb = gb$ olacak şekildeki her $a, b \in X\ için\ ga \perp gb$ dir.

Ayrıca $f(X) \subseteq g(X)$ ve $g(X), X\ in$ tam ortogonal alt kümesi olsun. Bu durumda $f\ ve\ g$ nin X içinde bir tek çakışım noktası vardır ve $f\ ile\ g$ zayıf bağdaşık iki dönüşüm ise, $f\ ve\ g$ nin bir tek ortak sabit noktası vardır.

<u>*İspat*</u> $(X, \perp, d)$ ortogonal koni metrik uzay olduğundan;

$$\exists x_0 \in X, (\forall y \in X, x_0 \perp y) \vee (\forall y \in X, y \perp x_0)$$

dır.

Bu şartı sağlayan bir $x_0 \in X$ noktası seçelim. Bu nokta için $f(X) \subseteq g(X)$ olduğundan, bir $x_1 \in X\ için\ f(x_0) = g(x_1)$ olur.

Benzer şekilde devam edilirse,

$$\forall x_n \in X, f(x_n) = g(x_{n+1}) \tag{10}$$

olacak şekilde $x_{n+1} \in X$ vardır.

Diğer taraftan x_0 ortogonal eleman iken, f ortogonalliği koruduğundan ve dizisel ortogonal bir dönüşüm olduğundan,

$$\begin{aligned} 1)\ & x_0 \perp x_1 \Rightarrow f(x_0) \perp f(x_1) \\ & \Rightarrow g(x_1) = f(x_0) \perp f(x_1) = g(x_2) \\ & \Rightarrow g(x_2) \perp g(x_3) \end{aligned}$$

şeklinde devam edilirse $\{g(x_n)\}$ ortogonal dizidir.

Veya

$$\begin{aligned} 2)\ & x_1 \perp x_0 \Rightarrow f(x_1) \perp f(x_0) \\ & \Rightarrow g(x_2) = f(x_1) \perp f(x_0) = g(x_1) \\ & \Rightarrow g(x_3) \perp g(x_2) \end{aligned}$$

şeklinde devam edilirse $\{g(x_n)\}$ ortogonal dizidir.

Ayrıca (i) koşulundan,

$$\begin{aligned} d(gx_{n+1}, gx_n) &= d(fx_n, fx_{n-1}) \\ &\preccurlyeq \lambda d(gx_n, gx_{n-1}) \\ &= \lambda d(fx_{n-1}, fx_{n-2}) \\ &\preccurlyeq \lambda^2 d(gx_{n-1}, gx_{n-2}) \\ &\dots \\ &\preccurlyeq \lambda^n d(gx_1, gx_0) \end{aligned}$$

Burada $n > m$ olacak şekilde seçilirse,

$$\begin{aligned} d(gx_n, gx_m) & \\ &\preccurlyeq d(gx_n, gx_{n-1}) + d(gx_{n-1}, gx_{n-2}) + \cdots \\ &\qquad + d(gx_{m+1}, gx_m) \\ &\preccurlyeq (\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \cdots + \lambda^m) d(gx_1, gx_0) \\ &\preccurlyeq \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(gx_1, gx_0) \end{aligned}$$

olur.

P, K normal sabitiyle normal koni olduğundan,

$$\|d(gx_n, gx_m)\| \leq \frac{\lambda^m}{1-\lambda} K \|d(gx_1, gx_0)\|$$

olup $n, m \to \infty\ limit\ durumunda\ d(gx_n, gx_m) \to \theta\ olur.$ Bu nedenle $\{g(x_n)\}$ bir Cauchy dizisidir.

$g(X)$ tam olduğundan, burada $n \to \infty$ limit durumunda $gx_n \to q$ olacak şekilde $g(X)$ içinde bir q elemanı vardır. Sonuç olarak $gp = q$ olacak şekilde X içinde bir p elemanı bulabiliriz. Böylece (i) ve (iii) birlikte kullanılırsa, yeterince büyük $n \in \mathbb{N}^+$ için,

$$d(gx_n, fp) = d(fx_{n-1}, fp) \preccurlyeq \lambda d(gx_{n-1}, gp)$$

olduğundan

$$\|d(gx_n, fp)\| \leq K\lambda \|d(gx_{n-1}, gp)\|$$

olur.

Bundan dolayı, $n \to \infty$ limit durumunda $d(gx_n, fp) \to \theta$ olur. Ayrıca $n \to \infty$ limit durumunda $d(gx_n, gp) \to \theta$ dır.

Koni metrik uzaydaki limitin tekliğinden $fp = gp$ olur. Şimdi $f\ ve\ g\ nin$ bir tek çakışım noktasına sahip olduğunu gösterelim. Bunun için $fr = gr$ olacak şekilde X içinde başka bir r noktası olduğunu kabul edelim. Bu durumda (i) ve (iv) birlikte kullanılırsa,

$$d(gr, gp) = d(fr, fp) \preccurlyeq \lambda d(gr, gp)$$

olup çelişkilidir. O halde $\|d(gr, gp)\| = 0$ olup, $gr = gp$ elde edilir. Bu halde $f\ ve\ g\ nin\ X$ içinde bir tek çakışım noktası olup, Lemma 3 den bir tek ortak sabit noktaları vardır.

Teorem 2. $(X, \perp, d)$ bir ortogonal koni metrik uzay ve P, K normal sabitiyle bir normal koni olsun. $f, g : X \to X$ dönüşümleri ve $(x_n) \subseteq X$ dizisi aşağıdaki şartları sağlasın.

(i) $gx \perp gy$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için,

$$d(fx, fy) \preccurlyeq \lambda d(gx, gy)$$

olacak şekilde en az bir $\lambda \in (0,1)$ vardır.

(ii) f, g ortogonalliği koruyan iki dönüşüm olsun.

(iii) $gx_n \to q = gp$ olacak şekilde $p, q \in X$ varken her $n \in \mathbb{N}^+$ için $gx_n \perp q = gp$ dir.

(iv) $fa = ga\ ve\ fb = gb$ olacak şekilde her $a, b \in X\ için\ ga \perp gb$ dir.

Ayrıca $f(X) \subseteq g(X)$ ve $g(X), X$ in tam ortogonal alt kümesi olsun. Bu durumda $f\ ve\ g$ nin X içinde bir tek çakışım noktası vardır ve $f\ ile\ g$ zayıf bağdaşık iki dönüşüm ise, $f\ ve\ g$ nin bir tek ortak sabit noktası vardır.

<u>*İspat*</u> $(X, \perp, d)$ ortogonal koni metrik uzay olduğundan;

$$\exists x_0 \in X, (\forall y \in X, x_0 \perp y) \vee (\forall y \in X, y \perp x_0)$$

dır.

Bu şartı sağlayan bir $x_0 \in X$ noktası seçelim. Bu nokta için $f(X) \subseteq g(X)$ olduğundan, bir $x_1 \in X\ için\ f(x_0) = g(x_1)$ olur.

Benzer şekilde devam edilirse;

$$\forall x_n \in X, f(x_n) = g(x_{n+1}) \tag{11}$$

olacak şekilde $x_{n+1} \in X$ vardır.

Diğer taraftan x_0 ortogonal eleman iken, f, g ortogonalliği koruduğundan,

$$\begin{aligned} &1)\ x_0 \perp x_1 \Rightarrow f(x_0) \perp f(x_1) \\ &\Rightarrow g(x_1) = f(x_0) \perp f(x_1) = g(x_2) \\ &\Rightarrow g(x_2) \perp g(x_3) \end{aligned}$$

şeklinde devam edilirse $\{g(x_n)\}$ ortogonal dizidir.

Veya,

$$\begin{aligned} &2)\ x_1 \perp x_0 \Rightarrow f(x_1) \perp f(x_0) \\ &\Rightarrow g(x_2) = f(x_1) \perp f(x_0) = g(x_1) \\ &\Rightarrow g(x_3) \perp g(x_2) \end{aligned}$$

şeklinde devam edilirse $\{g(x_n)\}$ ortogonal dizidir. Ve kanıt Teorem 1 in ispatına benzer şekilde tamamlanabilir.

Teorem 3. $(X, \perp, d)$ bir ortogonal koni metrik uzay ve P, K normal sabitiyle bir normal koni olsun. $f, g : X \to X$ dönüşümleri ve $(x_n) \subseteq X$ dizisi aşağıdaki şartları sağlasın.

(i) $gx \perp gy$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için,

$$d(fx, fy) \preccurlyeq \lambda(d(fx, gx) + d(fy, gy))$$

olacak şekilde en az bir $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ vardır.

(ii) f ortogonalliği koruyan, dizisel ortogonal bir dönüşüm olsun.

(iii) $gx_n \to q = gp$ olacak şekilde$p, q \in X$ varken her $n \in \mathbb{N}^+$ için $gx_n \perp q = gp$ dir.

(iv) $fa = ga\ ve\ fb = gb$ olacak şekilde $a, b \in X$ için $ga \perp gb$ dir.

Ayrıca $f(X) \subseteq g(X)$ ve $g(X)$, X in tam ortogonal alt kümesi olsun. Bu durumda f ve g nin X içinde bir tek çakışım noktası vardır ve $f\ ile\ g$ zayıf bağdaşık iki dönüşüm ise, $f\ ve\ g$ nin bir tek ortak sabit noktası vardır.

<u>*İspat*</u> $(X, \perp, d)$ ortogonal koni metrik uzay olduğundan;

$$\exists x_0 \in X, (\forall y \in X, x_0 \perp y) \vee (\forall y \in X, y \perp x_0)$$

dır.

Bu şartı sağlayan bir $x_0 \in X$ noktası seçelim. Bu nokta için $f(X) \subseteq g(X)$ olduğundan, bir $x_1 \in X\ için\ f(x_0) = g(x_1)$ olur.

Benzer şekilde devam edilirse;

$$\forall x_n \in X, f(x_n) = g(x_{n+1}) \tag{12}$$

olacak şekilde $x_{n+1} \in X$ vardır.

Diğer taraftan x_0 ortogonal eleman iken, f ortogonalliği koruduğundan ve dizisel ortogonal bir dönüşüm olduğundan,

$$\begin{aligned}&1) x_0 \perp x_1 \Rightarrow f(x_0) \perp f(x_1)\\&\Rightarrow g(x_1) = f(x_0) \perp f(x_1) = g(x_2)\\&\Rightarrow g(x_2) \perp g(x_3)\\&\ldots\end{aligned}$$

şeklinde devam edilirse $\{g(x_n)\}$ ortogonal dizidir.

Veya,

$$\begin{aligned}&2) x_1 \perp x_0 \Rightarrow f(x_1) \perp f(x_0)\\&\Rightarrow g(x_2) = f(x_1) \perp f(x_0) = g(x_1)\\&\Rightarrow g(x_3) \perp g(x_2)\\&\ldots\end{aligned}$$

şeklinde devam edilirse $\{g(x_n)\}$ ortogonal dizidir.

Ayrıca (i) koşulundan;

$$\begin{aligned}&d(gx_{n+1}, gx_n) = d(fx_n, fx_{n-1})\\&\preccurlyeq \lambda(d(fx_n, gx_n) + d(fx_{n-1,} gx_{n-1}))\\&= \lambda(d(gx_{n+1}, gx_n) + d(gx_n, gx_{n-1}))\\&\Rightarrow d(gx_{n+1}, gx_n) \preccurlyeq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(gx_n, gx_{n-1})\end{aligned}$$

yazılıp, $t = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ alınırsa,

$$d(gx_{n+1}, gx_n) \preccurlyeq td(gx_n, gx_{n-1})$$

olur. Burada $n > m$ olacak şekilde seçilirse,

$$\begin{aligned}&d(gx_n, gx_m) \leq d(gx_n, gx_{n-1})\\&\qquad + d(gx_{n-1}, gx_{n-2}) + \ldots + d(gx_{m+1}, gx_m)\\&\leq (t^{n-1} + t^{n-2} + \ldots + t^m) d(gx_1, gx_0)\\&\leq \frac{t^m}{1-t} d(gx_1, gx_0)\end{aligned}$$

olur.

P, K normal sabitiyle normal koni olduğundan;

$$\|d(gx_n, gx_m)\| \leq \frac{t^m}{1-t} K \|d(gx_1, gx_0)\|$$

olup $n, m \to \infty$ $d(gx_n, gx_m) \to \theta$ *olur*. Bu nedenle $\{g(x_n)\}$ bir Cauchy dizisidir.

$g(X)$ tam olduğundan, $n \to \infty$ limit durumunda $gx_n \to q$ olacak şekilde $g(X)$ içinde bir q elemanı vardır. Sonuç olarak $gp = q$ olacak şekilde X içinde bir p elemanı bulabiliriz. Böylece (i) ve (iii) birlikte kullanılırsa, yeterince büyük $n \in \mathbb{N}^+$ için,

$$\begin{aligned}&d(gx_n, fp) = d(fx_{n-1}, fp)\\&\preccurlyeq \lambda\big(d(fx_{n-1}, gx_{n-1}) + d(fp, gp)\big)\\&\preccurlyeq \lambda(d(fx_{n-1}, gx_{n-1}) + d(fp, gx_n)\\&\Rightarrow d(gx_n, fp) \preccurlyeq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(gx_n, gx_{n-1})\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\|d(gx_n, fp)\| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} K \|d(gx_n, gx_{n-1})\|$$

olur.

Bundan dolayı, $n \to \infty$ limit durumunda $d(gx_n, fp) \to \theta$ olur. Ayrıca $n \to \infty$ limit durumunda $d(gx_n, gp) \to \theta$ olur.

Koni metrik uzaydaki limitin tekliğinden $fp = gp$ olur. Şimdi f *ve* g *nin* bir tek çakışım noktasına sahip olduğunu gösterelim. Bunun için $fr = gr$ olacak şekilde X içinde başka bir r noktası olduğunu kabul edelim. Bu durumda (i) ve (iv) birlikte kullanılırsa,

$$d(gr, gp) = d(fr, fp) \preccurlyeq \lambda[d(fr, gr) + d(fp, gp)] = \theta$$

olup çelişkilidir. O halde $\|d(gr, gp)\| = 0$ olup, $gr = gp$ elde edilir. Bu halde f *ve* g *nin* X içinde bir tek çakışım noktası olup, Lemma 3 den bir tek ortak sabit noktaları vardır.

Teorem 4. $(X, \perp, d)$ bir ortogonal koni metrik uzay ve P, K normal sabitiyle bir normal koni olsun. $f, g : X \to X$ dönüşümleri ve $(x_n) \subseteq X$ dizisi aşağıdaki şartları sağlasın.

(i) $gx \perp gy$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için,

$$d(fx, fy) \preccurlyeq \lambda(d(fx, gy) + d(fy, gx))$$

olacak şekilde en az bir $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ vardır.

(ii) f ortogonalliği koruyan, dizisel ortogonal bir dönüşüm olsun.

(iii) $gx_n \to q = gp$ olacak şekilde $p, q \in X$ varken her $n \in \mathbb{N}^+$ için $gx_n \perp q = gp$ dir.

(iv) $fa = ga$ *ve* $fb = gb$ olacak şekilde her $a, b \in X$ *için* $ga \perp gb$ dir.

Ayrıca $f(X) \subseteq g(X)$ ve $g(X)$, X in tam ortogonal alt kümesi olsun. Bu durumda f *ve* g *nin* X içinde bir tek çakışım noktası vardır ve f *ile* g zayıf bağdaşık iki dönüşüm ise, f *ve* g nin bir tek ortak sabit noktası vardır.

<u>*İspat*</u> $(X, \perp, d)$ ortogonal koni metrik uzay olduğundan;

$$\exists x_0 \in X, (\forall y \in X, x_0 \perp y) \vee (\forall y \in X, y \perp x_0)$$

dır.

Bu şartı sağlayan bir $x_0 \in X$ noktası seçelim. Bu nokta için $f(X) \subseteq g(X)$ olduğundan, bir $x_1 \in X$ *için* $f(x_0) = g(x_1)$ olur.

Benzer şekilde devam edilirse;

$$\forall x_n \in X, f(x_n) = g(x_{n+1}) \qquad (13)$$

olacak şekilde $x_{n+1} \in X$ vardır.

Diğer taraftan x_0 ortogonal eleman iken, f ortogonalliği koruduğundan ve dizisel ortogonal bir dönüşüm olduğundan,

$$\begin{aligned}&1)\ x_0 \perp x_1 \Rightarrow f(x_0) \perp f(x_1)\\&\Rightarrow g(x_1) = f(x_0) \perp f(x_1) = g(x_2)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x_2) \perp g(x_3)$$

şeklinde devam edilirse $\{g(x_n)\}$ ortogonal dizidir.

Veya,

$$\begin{aligned} &2)\ x_1 \perp x_0 \Rightarrow f(x_1) \perp f(x_0) \\ &\Rightarrow g(x_2) = f(x_1) \perp f(x_0) = g(x_1) \\ &\Rightarrow g(x_3) \perp g(x_2) \end{aligned}$$

şeklinde devam edilirse $\{g(x_n)\}$ ortogonal dizidir.

Ayrıca (i) koşulundan;

$$\begin{aligned} &d(gx_{n+1}, gx_n) = d(fx_n, fx_{n-1}) \\ &\preccurlyeq \lambda(d(fx_n, gx_{n-1}) + d(fx_{n-1,}gx_n)) \\ &= \lambda(d(gx_{n+1}, gx_{n-1}) + d(gx_n, gx_n)) \\ &\preccurlyeq \lambda(d(gx_{n+1}, gx_n) + d(gx_{n,}gx_{n-1})) \\ &\Rightarrow d(gx_{n+1}, gx_n) \preccurlyeq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(gx_n, gx_{n-1}) \end{aligned}$$

yazılıp, $t = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ alınırsa,

$$d(gx_{n+1}, gx_n) \preccurlyeq td(gx_n, gx_{n-1})$$

olur. Burada $n > m$ olacak şekilde seçilirse,

$$\begin{aligned} &d(gx_n, gx_m) \leq d(gx_n, gx_{n-1}) \\ &\qquad + d(gx_{n-1}, gx_{n-2}) + \ldots + d(gx_{m+1}, gx_m) \\ &\leq (t^{n-1} + t^{n-2} + \ldots + t^m) d(gx_1, gx_0) \\ &\leq \frac{t^m}{1-t} d(gx_1, gx_0) \end{aligned}$$

olur.

P, K normal sabitiyle normal koni olduğundan,

$$\|d(gx_n, gx_m)\| \leq \frac{t^m}{1-t} K \|d(gx_1, gx_0)\|$$

olup $n, m \to \infty$ limit durumunda $d(gx_n, gx_m) \to \theta\ olur.$ Bu nedenle $\{g(x_n)\}$ bir Cauchy dizisidir.

$g(X)$ tam olduğundan, $n \to \infty$ limit durumunda $gx_n \to q$ olacak şekilde $g(X)$ içinde bir q elemanı vardır. Sonuç olarak $gp = q$ olacak şekilde X içinde bir p elemanı bulabiliriz. Böylece (i) ve (iii) birlikte kullanılırsa, yeterince büyük $n \in \mathbb{N}^+$ için,

$$\begin{aligned} &d(gx_n, fp) = d(fx_{n-1}, fp) \\ &\preccurlyeq \lambda(d(fx_{n-1}, gp) + d(fp, gx_{n-1})) \\ &\preccurlyeq \lambda(d(gx_n, gx_n) + d(fp, gx_{n-1}) \\ &\preccurlyeq \lambda(d(fp, gx_n) + d(gx_n, gx_{n-1})) \\ &\Rightarrow d(gx_n, fp) \preccurlyeq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(gx_n, gx_{n-1}) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\|d(gx_n, fp)\| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} K \|d(gx_n, gx_{n-1})\|$$

olur.

Bundan dolayı, $n \to \infty$ limit durumunda $d(gx_n, fp) \to \theta$ olur. Ayrıca $n \to \infty$ limit durumunda $d(gx_n, gp) \to \theta$ olur. Koni metrik uzaydaki limitin tekliğinden $fp = gp$ olur. Şimdi $f\ ve\ g\ nin$ bir tek çakışım noktasına sahip olduğunu gösterelim. Bunun için $fr = gr$ olacak şekilde X içinde başka bir r noktası olduğunu kabul edelim. Bu durumda (i) ve (iv) birlikte kullanılırsa,

$$\begin{aligned} d(gr, gp) &= d(fr, fp) \\ &\preccurlyeq \lambda[d(fr, gp) + d(fp, gr)] \\ &= 2\lambda d(gr, gp) \end{aligned}$$

olup çelişkilidir. O halde $\|d(gr, gp)\| = 0$ olup, $gr = gp$ elde edilir. Bu halde $f\ ve\ g$ nin X içinde bir tek çakışım noktası olup, Lemma 3'den bir tek ortak sabit noktaları vardır.

IV. Tartışma

Matematiğin pek çok dalında geniş bir kullanım ve uygulama alanına sahip olan sabit nokta teorisi, pek çok bilim insanı tarafından ilgi çeken bir sahadır. Bu nedenle Banach büzülme prensibinin verilmesinin ardından, bu prensibin pek çok genelleştirmesi yapılmıştır. Bu genelleştirmelerden bir kısmı da öz dönüşümlerin ortak sabit noktalarının varlığı ve tekliği ile ilgilidir. Koni metrik uzaylar üzerinde de ortak sabit noktaların varlığı ve tekliği üzerine çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmada ise koni metrik uzaylar üzerinde bir ortogonallik bağıntısı tanımlayarak elde edilen ortogonal koni metrik uzaylar üzerinde ortak sabit noktaların varlığı ve tekliği incelenmiştir. Verilen teoremlerdeki büzülme prensiplerinin ortogonallik bağıntısı yoluyla yazılması nedeniyle açıktır ki ortak sabit noktaların varlığını ve tekliğini göstermek bu teoremler yoluyla kolaylaştırılmıştır.

V. Genel Değerlendirme

Çalışmamızın ilk bölümünde, kapsamlı bir literatür taraması sonucu, sabit nokta teori çalışmalarının başlangıcından itibaren uygun büzülme şartlarını sağlayan dönüşümler için ortak sabit noktaların varlığının bulunması süreciyle ilgili gelişmelere değinilmiş, ardından da bu çalışmanın genel konusu vurgulanmıştır. İkinci bölümde, üçüncü bölümde verilecek olan ana teoremlerin anlaşılmasını sağlamak için gerekli temel tanımlar, örnekler ve lemmalar referanslarıyla verilmiştir. Üçüncü bölümde ise ortogonal koni metrik uzaylar üzerinde tanımlı öz dönüşümler ortak sabit noktaların varlığı ve tekliği ile ilgili teoremler verilmiştir.

Teşekkür

Çalışmamızın değerlendirilme sürecinde emeği geçen çok değerli bilim insanlarına ve ISAS 2019 sempozyumunun gerçekleştirilmesinde rol alan tüm ekibe özverili çalışmalarından ötürü teşekkür ederiz.

References

[1] Gordji, M. E., Ramezani, M., De La Sen, M. and Cho, Y. J., On orthogonal sets and Banach fixed point theorem. *Fixed Point Theory*, *18*(2), 569-578, 2017.

[2] Eshaghi Gordji, M. and Habibi, H.,. Fixed point theory in generalized orthogonal metric space. *Journal of Linear and Topological Algebra (JLTA)*, 6(3), 251-260, 2017.

[3] Bilgili Gungor, N., Orthogonal cone metric spaces and fixed points of orthogonal contractions. *Journal of Fixed Point Theory and Applications (In review)*

[4] Abbas, M. and Jungck, G., Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *341*(1), 416-420, 2008.

[5] Jungck, G., Commuting mappings and fixed points. *The American Mathematical Monthly*, *83*(4), 261-263, 1976.

[6] Sessa, S., On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations. *Publ. Inst. Math*, *32*(46), 149-153, 1982.

[7] G. Jungck, Compatible mappings and common fixed points, *Internat. J. Math. Math. Sci.* 9 (4), 771–779, 1986.

[8] Pant, R. P., Common fixed points of noncommuting mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *188*(2), 436-440, 1994.

[9] Kannan, R, Some results on fixed points. *Bull. Cal. Math. Soc.*, *60*, 71-76, 1968.

[10] G. Jungck, Common fixed points for noncontinuous nonself maps on non-metric spaces, *Far East J. Math. Sci*. (FJMS) 4,199–215, 1996.

[11] G. Jungck, B.E. Rhoades, Fixed point for set valued functions without continuity, *Indian J. Pure Appl. Math.* 29 (3), 227–238, 1998.

[12] Huang, L. G. and Zhang, X. (2007). Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings. *Journal of mathematical Analysis and Applications*, 332(2), 1468-1476.

[13] Turkoglu, D. and Abuloha, M. (2010). Cone metric spaces and fixed point theorems in diametrically contractive mappings. *Acta mathematica sinica, English series*, *26*(3), 489-496.