SETSCI Conference Proceedings,
4 (1): 364-366, 2019

ISAS 2019
3rd International Symposium on Innovative Approaches in Scientific Studies
Section: Engineering and Natural Sciences
April 19 – 21, 2019, Ankara, Turkey

Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Salınımlı Çekirdekli Konvolüsyon Operatörünün Sınırlılığı

Ferit Gürbüz[1*+]

[1]*Hakkari Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Hakkari 30000, Türkiye*
[*]*Sorumlu yazar: feritgurbuz@hakkari.edu.tr*
[+]*Konuşmacı: feritgurbuz@hakkari.edu.tr*
Sunum/Bildiri Tipi: Sözlü / Tam metin

Özet – Bu çalışmanın amacı ağırlık fonksiyonunun bazı özelliklerini uygulayarak, ağırlıklı Morrey uzaylarında salınımlı çekirdekli konvolüsyon operatörü için kuvvetli ve zayıf tipli ağırlıklı norm eşitsizliklerini elde etmektir. Dolayısıyla, bu çalışmanın ana odağı, klasik salınımlı çekirdekli singüler integral operatörünü ve onun son gelişmelerini incelemektir. Bu bağlamda, $p > 1$ için $L_{p,\kappa}(w)$ ağırlıklı Morrey uzayından bir diğer $L_{p,\kappa}(w)$ ağırlıklı Morrey uzayına ve $L_{1,\kappa}(w)$ uzayından $WL_{1,\kappa}(w)$ zayıf uzayına $\beta > 0, \beta \neq 0$ pozitif reel sayısı için $K_\beta(x) = e^{i|x|^\beta}(1+|x|)^{-n}$ salınımlı çekirdek olmak üzere $K_\beta * f(x)$ salınımlı çekirdekli konvolüsyon operatörünün sınırlılığının sağlanması için yeterlilik şartları elde edilmiştir. Bugüne kadar yapılan çalışmalarda genellikle çeşitli uzaylarda, $K_\beta * f(x)$ operatörü için bazı eşitsizlikler elde edilmiştir. Ancak bu operatörün ağırlıklı Morrey uzaylarındaki sınırlılıkları ile ilgili sonuçlar oldukça azdır. Bu çalışma ile literatürdeki bu boşluğun doldurulması planlanmaktadır.

Anahtar Kelimeler *– Salınımlı çekirdek, konvolüsyon operatörü, A_p ağırlıkları, ağırlıklı Lebesgue uzayı, ağırlıklı Morrey uzayı*

I. GİRİŞ

Ağırlıklı eşitsizlikler Fourier analizinde önemli bir yere sahip olup çok çeşitli uygulamalara sahiptir. Özellikle, ağırlık teorisi Lipschitz bölgeleri üzerinde Laplace denklemi için sınır değer problemleri çalışmalarında önemli bir rol oynamaktadır. Ağırlıklı eşitsizliklerin diğer uygulamaları extrapolasyon teorisi, vektör değerli eşitsizlikler ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin bazı sınıfları için hesaplamaları içerir. Bu alandaki ilk çalışma 1970 lerde Muckenhoupt [9] tarafından yapıldı. O, iyi bilinen A_p şartını tanıttı ve bunu $L_p(w)$ ağırlıklı Lebesgue uzayında M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılığını karakterize etmek için kullandı. Bundan böyle A_p yi Muckenhoupt sınıfları olarak adlandıracağız. Yani, tüm B yuvarları için

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(y)dy\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\right)^{p-1} \leq C$$

ise, bu durumda bazı $1 < p < \infty$ için $w(x) \in A_p(\mathbb{R}^n)$ dir denir. Daha fazla ayrıntı için bakınız: (Karaman [6]; Gürbüz [5]). Yani, Hardy-Littlewood maksimal operatörünün $L_p(w) \equiv L_p(\mathbb{R}^n, w)$ ağırlıklı L_p uzayını kendi üzerine dönüştüren Muckenhoupt karakterizasyonu, A_p sınıfının tanımlanmasına ve ağırlıklı eşitsizlerin gelişmesine yardımcı olmuştur.

Bir ağırlık fonksiyonu, hemen hemen her yerde pozitif lokal integrallenebilen $w: \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ bir fonksiyondur. Buradan ağırlıkların sadece sıfır Lebegue ölçülü bir küme üzerinde sıfır ya da sonsuz olduğu anlaşılır. Eğer w bir ağırlık ve $1/w$ lokal integrallenebilir ise bu durumda $1/w$ fonksiyonu da bir ağırlıktır.

Verilen bir w ağırlığı ve bir E ölçülebilir kümesi için $w(E) = \int_E w(x)dx$ notasyonunu E kümesinin w-ölçüsünü göstermek için kullanacağız. Ağırlıklar lokal integrallenebilir fonksiyonlar olduklarından bir yuvar tarafından içerilen bütün E kümeleri için $w(E) < \infty$ olur. Verilen bir w ağırlık fonksiyonu için B herhangi bir yuvar olmak üzere $w(2B) \leq Dw(B)$ olacak şekilde bir $D > 0$ sabiti varsa w doubling şartını sağlar denir. w bu şartı sağladığında kısalık için $w \in \Delta_2$ biçiminde yazılır. Üstelik bu fonksiyon Lebesgue ölçüsüne göre mutlak sürekli olan $d\mu = w(x)dx$ ölçüsünü doğurur. Bu sebeple, yazarlar sıklıkla ölçüyü ağırlıkla tanımlarlar ve $L_p(w)$ yi $L_p(\mu)$ anlamına gelecek şekilde yazarlar.

Sonuç olarak, w bir ağırlık, yani pozitif lokal integrallenebilir bir fonksiyon ise bu durumda $L_p(w)$ ağırlıklı Lebesgue uzayı $1 \leq p < \infty$ için

$$L_p(w) \equiv L_p(\mathbb{R}^n, w)$$

$$= \left\{f : \| f \|_{L_{p,w}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}$$

ve $p = \infty$ için

$$L_{\infty,w} \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n, w)$$

$$= \left\{f : \| f \|_{L_{\infty,w}} = esssup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|w(x) < \infty\right\}$$

olarak tanımlanır. $w \equiv 1$ ise basitçe $\| f \|_{L_{p,w}}$ yerine $\| f \|_{L_p}$ yazarız.

$L_p(w)$ ağırlıklı Lebesgue uzayı dışında, $L_p(w)$ nin doğal bir genelleştirmesi olan $L_{p,\kappa}(w)$ ağırlıklı Morrey uzayı başka bir önemli fonksiyon uzayıdır. $1 \le p < \infty$, $0 < \kappa < 1$ ve w ağırlık fonksiyonu olmak üzere, $L_{p,\kappa}(w) \equiv L_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n, w)$ ağırlıklı Morrey uzayı

$$\| f \|_{L_{p,\kappa}(w)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{\|w\|_{L_1(B(x,r))}^{\kappa}} \| f \|_{L_p(B(x,r),w)}^{p} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

ile bütün $f \in L_p^{loc}(w)$ fonksiyonlarının tüm sınıflarının bir koleksiyonudur. Eğer $\kappa = 0$ ise, bu durumda $L_{p,0}(w) = L_p(w)$ olur. Eğer $\kappa = 1$ ise, bu durumda w ye göre Lebesgue diferensiyelleme teoreminden $L_{p,1}(w) = L_\infty(w)$ elde edilir. Ayrıca $1 \le p < \infty$, $0 < \kappa < 1$ ve w ağırlık fonksiyonu olmak üzere, $WL_{p,\kappa}(w) \equiv WL_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n, w)$ zayıf ağırlıklı Morrey uzayı

$$\| f \|_{WL_{p,\kappa}(w)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{\|w\|_{L_1(B(x,r))}^{\kappa}} \| f \|_{WL_p(B(x,r),w)}^{p} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

ile tanımlanır.

$\beta > 0, \beta \neq 1$ pozitif reel sayısı verilsin. Bu durumda $K_\beta(x)$ salınımlı çekirdek

$$K_\beta(x) = e^{i|x|^\beta}(1 + |x|)^{-n}$$

ile tanımlanır. Bu durumda salınımlı çekirdekli konvolüsyon operatörünü

$$K_\beta * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\beta(x-y) f(y) dy$$

ile göstereceğiz.

Bu çalışma boyunca C, açıkça ifade edilmeksizin her bir ifadedeki değerini değiştirebilen pozitif bir sabiti ifade eder.

II. Materyal ve Yöntem

Bu çalışmanın hazırlanmasında kaynak makalelerden yararlanılmıştır. Çalışma süresince konuyla ilgili makale ve kitaplar taranıp benzer teknikler kullanılarak bu çalışma sonuçlandırılmıştır.

III. Bazı Lemmalar

Bu bölümde ana sonuçları ve ispatlarını vermeden önce, sırasıyla A_p ağırlık sınıflarının ve ağırlıklı Lebesgue uzayının özellikleri ile ilgili aşağıdaki lemmaları ispatsız vereceğiz. Bu lemmalar ana sonuçların ispatı için gereklidir.

Lemma 1 [7] Eğer $w \in \Delta_2$ ise bu durumda

$$w(2B) \ge Cw(B)$$

olacak şekilde bir $C > 1$ sabiti vardır.

Lemma 2 [3] $\beta > 0, \beta \neq 1$ ve $\mu > 0$ olsun.

(i) Eğer $w \in A_1$ ise bu durumda

$$\sup_{\mu>0} \mu w\left(\left\{x \in B: \left|K_\beta * f(x)\right| > \mu\right\}\right) \le \| f \|_{L_{1,w}}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır.

(ii) Eğer $w \in A_p$ $(1 < p < \infty)$ ise bu durumda

$$\| K_\beta * f \|_{L_{p,w}} \le C \| f \|_{L_{p,w}}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır.

IV. Ana Sonuç ve İspatı

Bu bölümde ana sonucumuzu ve ispatını vereceğiz.

Teorem 1 $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$ ve $w \in A_p$ olsun. Bu durumda

$$\| K_\beta * f \|_{L_{p,\kappa}(w)} \le C \| f \|_{L_{p,\kappa}(w)} \qquad (1)$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır.

Ayrıca $p = 1$ için $0 < \kappa < 1$, $w \in A_1$ ve $\mu > 0$ olsun. Bu durumda

$$\sup_{\mu>0} \mu w\left(\left\{x \in B: \left|K_\beta * f(x)\right| > \mu\right\}\right) \le \| f \|_{L_{1,\kappa}(w)} w(B)^\kappa \qquad (2)$$

sağlanır.

İspat. $1 < p < \infty$ ve $w \in A_p$ olsun. Keyfi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $B = B(x_0, r)$, x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar ve $2B = B(x_0, 2r)$ olsun. f fonksiyonunu

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{(2B)^c}(y), \quad r > 0$$

biçiminde ifade edelim. Bu durumda $K_\beta * f(x) = K_\beta * f_1(x) + K_\beta * f_2(x)$ elde ederiz. $K_\beta * f$ operatörünün lineer olma özelliğinden

$$\frac{1}{w(B)^\kappa}\int_B |K_\beta * f(x)|^p w(x)dx \le \frac{1}{w(B)^\kappa}\int_B |K_\beta * f_1(x)|^p w(x)dx + \frac{1}{w(B)^\kappa}\int_B |K_\beta * f_2(x)|^p w(x)dx := F + G$$

elde ederiz.

F'yi tahmin etmek için Lemma 1 den

$$F \le C \| f \|_{L_{p,\kappa}(w)} \qquad (3)$$

elde ederiz.

Şimdi G'nin tahminine dönelim. Bunun için önce aşağıdaki noktasal tahmini elde edelim:

$$\left|K_\beta * f_2(x)\right| \le C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|2^k B|} \int_{2^k B} |f(z)| dz. \qquad (4)$$

Sonra (4), Hölder eşitsizliği ve A_p şartından

$$\int_{2^k B} |f(z)| dz \le C \| f \|_{L_{p,\kappa}(w)} |2^{k+1}B| w(2^{k+1}B)^{\frac{1}{p}(\kappa-1)}$$

elde ederiz. Böylece,

$$G \le C \| f \|_{L_{p,\kappa}(w)} \qquad (5)$$

elde edilir. Sonuç olarak (3) ve (5) den

$$\frac{1}{w(B)^\kappa}\int_B |K_\beta * f(x)|^p w(x)dx \le C \| f \|_{L_{p,\kappa}(w)}$$

elde edilir. Böylece (1)'in ispatı tamamlanır.

Şimdi de yukarıdaki (2)'nin tahminine dönelim. Bunun için de önce f fonksiyonunu

$$f = f\chi_{2B} + f\chi_{(2B)^C} =: f_1 + f_2$$

biçiminde ifade edelim. Bu durumda herhangi bir $\mu > 0$ için

$$w(\{x \in B: |K_\beta * f(x)| > \mu\}) \leq$$
$$w\left(\left\{x \in B: |K_\beta * f_1(x)| > \frac{\mu}{2}\right\}\right) +$$
$$w\left(\left\{x \in B: |K_\beta * f_2(x)| > \frac{\mu}{2}\right\}\right)$$

yazılır.

Lemma 1 ve Lemma 2 (i) den yukarıdaki ilk kısmı aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$$w\left(\left\{x \in B: |K_\beta * f_1(x)| > \frac{\mu}{2}\right\}\right) \leq \frac{C}{\mu} \| f \|_{L_{1,\kappa}(w)} \, w(B)^\kappa. \quad (6)$$

İkinci kısım için, önce

$$w\left(\left\{x \in B: |K_\beta * f_2(x)| > \frac{\mu}{2}\right\}\right)$$
$$\leq \frac{C}{\mu} \int_{\left\{x \in B: |K_\beta * f_2(x)| > \frac{\mu}{2}\right\}} |K_\beta * f_2(x)| w(x) dx$$

olduğu görülür.

Sonra (4) eşitsizliğini yukarıda yerine yazarsak

$$w\left(\left\{x \in B: |K_\beta * f_2(x)| > \frac{\mu}{2}\right\}\right) \leq \frac{C}{\mu} \| f \|_{L_{1,\kappa}(w)} \, w(B)^\kappa \quad (7)$$

olduğunu görürüz.

Böylece (6) ve (7) den Teorem 1 in ispatını tamamlamış oluruz.

V. TARTIŞMA VE SONUÇ

Harmonik analizde, klasik operatörlerin (= singüler, maksimal ve Riesz potansiyelleri) çeşitli fonksiyon uzaylarındaki eşitsizliklerinin çalışmaları çok önemli bir yer tutmaktadır. Klasik Morrey uzayları, ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarını araştırma çalışmalarında Morrey [8] tarafından ortaya konulmuştur. Morrey uzayları Lebesgue uzaylarının bir uzantısı olarak değerlendirileceğinden klasik operatörlerin sınırlılıklarının Morrey uzaylarında araştırılması oldukça doğal ve önemlidir. Chiarenza ve Frasca [2] Hardy-Littlewood maksimal operatörü, kesirli integral operatörü ve singüler integral operatörlerinin Morrey uzaylarında sınırlılığını göstermiştir. Morrey uzaylarında kesirli integral operatörünün (Riesz Potansiyeli) sınırlılığı Adams [1] tarafından çalışılmıştır. Ağırlıklı Lebesgue uzaylarında yukarıda bahsedilen operatörlerin sınırlılığı Muckenhoupt ve Wheeden [10] ve ayrıca Coifman ve Fefferman [4] tarafından elde edilmiştir. Ayrıca, bu uzaylarda $K_\beta * f(x)$ operatörünün sınırlılığı Chanillo ve ark. [3] tarafından çalışılmıştır. Bu sonuçlar daha sonra çeşitli uzaylara genişletilmiştir. Diğer taraftan (ağırlıklı) Morrey uzayları (ağırlıklı) Lebesgue uzaylarının bir uzantısı olarak değerlendirilebileceğinden klasik operatörlerin sınırlılıklarının ağırlıklı Morrey uzaylarında araştırılması oldukça doğal ve önemlidir.

Özellikle, pek çok araştırma Morrey tipli uzaylar teorisindeki bazı boşlukları doldurmak için Morrey uzaylarını temel alan fonksiyon uzaylarına odaklanmaktadır. Ayrıca bu uzaylar ikinci mertebeden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarını araştırma çalışmalarında ve harmonik analizde önemli rol oynamıştır. Fakat bu konu bu makalenin kapsamını aştığından burada detayları geçiyoruz. Bununla beraber ağırlıklı Morrey uzayları yeni çalışılmaya başlanmış olup Komori ve Shirai [7] tarafından bu uzaylarda maksimal, kesirli integral, Calderón-Zygmund operatörlerin ve komütatör operatörünün sınırlılığı elde edilmiştir.

Sonuç olarak, bu çalışmada $p > 1$ için $L_{p,\kappa}(w)$ ağırlıklı Morrey uzayından bir diğer $L_{p,\kappa}(w)$ ağırlıklı Morrey uzayına ve $L_{1,\kappa}(w)$ uzayından $WL_{1,\kappa}(w)$ zayıf uzayına $\beta > 0, \beta \neq 0$ pozitif reel sayısı için $K_\beta * f(x)$ salınımlı çekirdekli konvolüsyon operatörünün sınırlılığının sağlanması için yeterlilik şartları elde edilmiştir.

KAYNAKÇA

[1] D. R. Adams, "A note on Riesz potentials," *Duke Math. J.*, vol. 42, no. 4, pp. 765-778, 1975.

[2] F. Chiarenza and M. Frasca, "Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function," *Rend. Mat. Appl.*, vol. 7, no. (3-4), pp. 273-279, 1987.

[3] S. Chanillo, D. Kurtz and G. Sampson, "Weighted weak (1,1) and weighted L^p estimates for oscillating kernels," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 295, pp. 127-145, 1986.

[4] R. R. Coifman and C. Fefferman, "Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals," *Studia Math.*, vol. 51, pp. 241-250, 1974.

[5] F. Gürbüz, "On the behaviors of sublinear operators with rough kernel generated by Calderón-Zygmund operators both on weighted Morrey and generalized weighted Morrey spaces," *Int. J. Appl. Math. & Stat.*, vol. 57, no. 2, pp. 33-42, 2018.

[6] T. Karaman, "Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Bir Sınıf Altlineer Operatörlerin Sınırlılığı ve Bazı Uygulamaları," Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2012.

[7] Y. Komori and S. Shirai, "Weighted Morrey spaces and a singular integral operatör," *Math. Nachr.*, vol. 282, no. 2, pp. 219-231, 2009.

[8] C. B. Morrey, "On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 43, pp. 126-166, 1938.

[9] B. Muckenhoupt, "Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 165, pp. 207-226, 1972.

[10] B. Muckenhoupt and R. L. Wheeden, "Weighted norm inequalities for fractional integrals," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 192, pp. 261-274, 1974.